

СПОСОБЪ НАИМЕНЬШИХЪ КВАДРАТОВЪ

ДИССЕРТАЦІЯ

НА СТЕПЕНЬ МАГИСТРА МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

КАНДИДАТА КИРИЛЛА.

МОСКВА.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1862.

Печатать дозволяется,

по определению Физико-Математического факультета. Москва, Февраля 7-го 1862 года.

Деканъ, Действительный Статскій Советникъ Г. Щуровскій.



СПОСОБЪ НАИМЕНЬШИХЪ КВАДРАТОВЪ.

ВВЕДЕНИЕ.

Изысканіе вѣроятнѣйшихъ выводовъ изъ наблюдений есть безъ сомнѣнія одинъ изъ самыхъ важныхъ вопросовъ, входящихъ въ область Теоріи Вѣроятностей. Вопросы подобнаго рода рѣдко представляются въ такомъ простомъ и ясномъ видѣ, чтобы можно было для нихъ найти вполнѣ удовлетворительное рѣшеніе; въ большей части случаевъ возможно только рѣшеніе, приближенное и до извѣстной степени произвольное. Причина этого заключается главнымъ образомъ въ особенномъ характерѣ самаго понятія о случайности явленій, понятія по существу своему не строго опредѣленнаго, рѣзко отличающаго Теорію Вѣроятностей отъ другихъ математическихъ наукъ. Понятно, что при такихъ условіяхъ должно обращать очень большое вниманіе на тѣ границы, въ которыхъ остаются справедливыми заключенія, выводимыя изъ теоретическихъ указаній; особенно если дѣло идетъ о вопросахъ, имѣющихъ важное практическое примѣненіе.

Около шестидесяти лѣтъ тому назадъ Гауссомъ и Лапласомъ былъ предложенъ для сочетанія многочисленныхъ наблюдений способъ наименьшихъ квадратовъ; съ тѣхъ поръ онъ вошелъ во всеобщее употребленіе и безъ сомнѣнія принесть опытнымъ наукамъ великую пользу. Что касается до практической стороны этого способа, то ему нельзя не отдать рѣшительнаго преимущества, потому что едва ли возможенъ другой столь же простой и столь же общій приемъ для рѣшенія многочисленныхъ условныхъ уравненій. Теорія показала, что этотъ способъ, предложенный сначала какъ чисто практическій приемъ, для того, чтобы устранить неопредѣленность при сочетаніи многочисленныхъ наблюдений, даетъ въ дѣствѣ съ тѣмъ, конечно съ извѣстными условіями, самые выгодные результаты. Это заключеніе по свойству вопроса не можетъ имѣть абсолютнаго значенія и потому весьма важно опредѣлить, въ какой мѣрѣ оно можетъ быть справедливо. Гауссъ и Лапласъ являются представителями двухъ совершенно различныхъ мнѣній о значеніи способа наименьшихъ квадратовъ. У Лапласа находимъ строгое и безпристрастное наследованіе этого вопроса; изъ его анализа видно, что результаты способа наименьшихъ квадратовъ получаютъ болѣе или менѣе значительную вѣроятность, только при условіи большаго числа наблюдений; между тѣмъ какъ Гауссъ старался на основаніи постороннихъ соображеній придать этому способу безусловное значеніе. Если мы обратимъ вниманіе на то, что въ законѣ большихъ чиселъ заключается вся сущность Теоріи случаевъ и что только при большомъ числѣ испытаній получаютъ дѣйствительное, фактическое значеніе всѣ свойства случайныхъ явленій, то не трудно будетъ видѣть справедливость Лапласова вывода: при ограниченномъ же числѣ наблюдений мы все не можемъ рассчитывать на взаимное уничтоженіе погрѣбностей и само собою понятно,

что всякое сочетание наблюдений может в таком случае повести столько же к увеличению погрешностей, сколько и к ослаблению их.

Одну из самых главных задач Теории наилучшего сочетания наблюдений составляет определение степени точности полученных по способу наименьших квадратов результатов. В общепринятой теории этот вопрос разрешается правильно только в том случае, когда наблюдения служат для определения одной неизвестной величины; в случае же многих неизвестных способы, употребляемые для изыскания вероятных ошибок выводов, приводят к весьма неправильным результатам. Этот чрезвычайно важный недостаток был замечен в первый раз и совершенно устранен Биеноме 1). К счастью опущение из виду этого обстоятельства не имело влияния на изыскание наилучших результатов и их весов; ошибка оказывается только при переходе от веса к вероятной погрешности; уже при двух неизвестных предельные вероятные погрешности должны быть почти вдвое больше обыкновенно принимаемых; так что обыкновенный до сих пор способ исчисления приводит к весьма ложным представлениям о степени точности выводов. Открытие и устранение этого недостатка принадлежит без сомнения к весьма важным явлениям современной науки.

В этом сочинении я старался показать, что степень доверия к результатам способа наименьших квадратов во всяком случае условливается числом наблюдений, на которых бы соображениях не основывалось доказательство этого способа; при определении предельных вероятных погрешностей в случае уравнений со многими неизвестными я ввёл поправку, указанную Биеноме и старался показать всю важность ея. В последней главе помещено решение числового примера, именно определение элементов кометы Донати 1858 года. Материалами, кроме классических сочинений Гаусса 2) и Лапласа 3) и вышеозначенного мемуара Биеноме, служили мне сочинения Энке 4) Риттера 5) Дингера 6) Савича 7) Биве 8) и др.

1) Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Liouville, T. XVII, année 1852. «Memoire de M. Bien-aymé sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés.»

2) Théorie analytique des probabilités, par Laplace.

3) Méthode des moindres carrés par Gauss; Memoires traduits et publiés par Bertrand 1855.

4) Astronomisches Jahrbuch für 1834, 1835 und 1836 J. Ueber die Methode der kleinsten Quadrate. von Encke.

5) Manuel théorique et pratique de l'application de la méthode des moindres carrés par Elie Ritter. 1858.

6) Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen von Dr. J. Dingler. 1857.

7) Приложение Теории Вероятностей къ вычисленію наблюдений и геодезическихъ измереній; составилъ Д-ръ Савичъ. 1857.

8) Journal de Mathématiques par Liouville T. XVIII 1853 a. «Théorie analytique des moindres carrés; par Biver».

ГЛАВА I.

Общая понятия. — Теорія среднихъ величинъ. — Правило арифметической среды. — Распространение его на случай разнородныхъ наблюдений. — Всѣхъ выводовъ. — Связь способа наименьшихъ квадратовъ съ правиломъ арифметической среды.

§ 1.

На результатъ всякаго наблюденія имѣетъ вліяніе множество случайныхъ причинъ, источникъ которыхъ заключается или въ несовершенствѣ инструментовъ или въ другихъ подобныхъ обстоятельствахъ: поэтому всякая числовая величина, полученная помощью измерительныхъ снарядовъ, представляетъ большее или меньшее отклоненіе отъ истиннаго значенія искомаго количества, т. е. сопровождается известною ошибкою или погрѣшностію. При современныхъ потребностяхъ точныхъ опытныхъ наукъ, гдѣ и теорія и практика достигли высокой степени совершенства, рѣдко бываетъ можно довольствоваться непосредственными данными изъ наблюдений; для получения возможно точныхъ результатовъ должно безъ сомнѣній употребить всѣ возможные старанія, чтобы ослабить вліяніе погрѣшностей не только при производствѣ наблюдений, но и при вычисленіяхъ.

Изученіе способовъ наблюдений показываетъ, что погрѣшности бываютъ двоякаго рода.— Однѣ изъ нихъ при одномъ и томъ же способѣ наблюденія, т. е. при известномъ положеніи инструмента и пр., отклоняютъ результатъ наблюденія постоянно въ одну и ту же сторону, т. е. постоянно увеличиваютъ или уменьшаютъ его; такого рода погрѣшности называются *постоянными*; онѣ необходимо сопровождаютъ каждый результатъ и следовательно не могутъ быть уничтожены, какъ бы часто не производились такого рода наблюденія и какъ бы мы не сочетали результаты этихъ наблюдений между собою. Многія изъ постоянныхъ погрѣшностей подвергнуты точнымъ изслѣдованіямъ въ теоріи инструментовъ; другія уничтожаются разнообразными приемами наблюдений; тѣ же, причина которыхъ совершенно неизвестна, могутъ быть открыты приѣмленіемъ даннаго способа наблюдений къ измѣренію точно известной величины, при чемъ открывается среднее значеніе постоянной погрѣшности: такимъ образомъ помощью хорошо изученныхъ и расположенныхъ способовъ наблюдений можно всегда получать результаты, освобожденные отъ постоянныхъ погрѣшностей. Совершенно другимъ характеромъ отличаются *случайныя* погрѣшности наблюдений: онѣ бываютъ то больше, то меньше, то положительны, то отрицательны, и совершенно не могутъ быть предугаданы и исключены изъ отдѣльныхъ наблюдений; взаимно этого онѣ имѣютъ свойство взаимно ослабляться при большемъ числѣ наблюдений; такъ что ихъ можно исключать при-

личнымъ сочетаніемъ наблюдений. Въ различныхъ способахъ наблюдений постоянныя погрѣшности происходятъ изъ весьма различныхъ источниковъ и имѣютъ различныя свойства; случайныя погрѣшности сохраняютъ напротивъ свои главные свойства при всякаго рода наблюденияхъ; въ Теоріи невыгоднѣйшаго сочетанія наблюдений принимаются въ расчетъ однѣ только случайныя погрѣшности, постоянныя же считаются тщательно исключенными.

§ 2.

Точкою исхода для аналитическаго рѣшенія вопроса о невыгоднѣйшихъ результатахъ служить возможность на основаніи свойствъ случайныхъ погрѣшностей, дѣйствительная величина которыхъ вообще неизвѣстна, судить о ихъ вѣроятной величинѣ.

Опытъ показываетъ, что при очень большомъ числѣ наблюдений постоянно обнаруживаются слѣдующія свойства случайныхъ погрѣшностей:

1) Для всякаго способа наблюдений существуютъ постоянныя предѣлы, даже которыхъ не простираются погрѣшности; эти предѣлы болѣе тѣсны для болѣе точныхъ способовъ и наоборотъ. 2) Изъ всѣхъ возможныхъ погрѣшностей чаще всего попадаются очень малыя, близкія къ нулю; наибольшія же, близкія къ предѣламъ, попадаютъ рѣже всѣхъ другихъ. 3) Число погрѣшностей положительныхъ и отрицательныхъ почти одинаково и онѣ приблизительно имѣютъ одинаковыя числовыя величины, группируясь, какъ сказано, преимущественно около нуля. Изъ этихъ общихъ свойствъ случайныхъ погрѣшностей можно себѣ составить нѣкоторое понятіе о ихъ вѣроятности.

Положивъ, что функція

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

выражаетъ вѣроятность предположенія, что погрѣшность какого нибудь наблюденія заключается между предѣлами ε_0 и ε ; тогда

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon + d\varepsilon} \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

будетъ вѣроятность предположенія, что погрѣшность заключается между предѣлами ε_0 и $\varepsilon + d\varepsilon$, а слѣдовательно безконечно малая разность

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon + d\varepsilon} \varphi \varepsilon d\varepsilon - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \varphi \varepsilon d\varepsilon = \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

будетъ означать вѣроятность предѣловъ ε и $\varepsilon + d\varepsilon$, т. е. безконечно малую вѣроятность погрѣшности ε . Вѣроятность погрѣшности будетъ тѣмъ больше, чѣмъ большую величину имѣетъ производная $\varphi \varepsilon$; поэтому мы будемъ называть $\varphi \varepsilon$ *относительною вѣроятностію* погрѣшности ε . Если для предѣловъ интеграла возьмемъ предѣлы погрѣшностей b и a , то интегралъ обратитъ

ся въ единицу, потому что погрѣшность наблюденія достоверно лежитъ между такими предѣлами; слѣд.

$$\int_b^a \varphi \epsilon d\epsilon = 1.$$

Притомъ всякія величины меньшія b и большія a , взятые для предѣловъ должны удовлетворять тому же условію; такъ что необходимо вообще

$$\int_{b-\eta}^{a+\xi} \varphi \epsilon d\epsilon = 1,$$

гдѣ ξ и η суть какія угодно положительныя величины; можно слѣдовательно взять также безконечные предѣлы т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \epsilon d\epsilon = 1$$

и это можетъ служить къ упрощенію интегрированія при частныхъ значеніяхъ $\varphi \epsilon$.

§ 3.

Когда ошибки наблюденій имѣютъ всѣ свойства случайныхъ, тогда предѣлы возможныхъ погрѣшностей равны между собою, но съ противоположными знаками, и, называя числовую величину ихъ черезъ a , мы имѣемъ:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi \epsilon d\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \epsilon d\epsilon = 1.$$

Видъ $\varphi \epsilon$ вообще не можетъ быть опредѣленъ безъ помощи какого нибудь частнаго предположенія, потому что эта функція зависитъ отъ множества случайныхъ вліяній, не подлежащихъ изслѣдованію по причинѣ неизвѣстности или сложности ихъ; но мы можемъ вывести аналитически тѣ свойства этой функціи, которыя соответствуютъ общимъ свойствамъ случайныхъ погрѣшностей. Такимъ образомъ допущеніе равной вѣроятности положительныхъ и отрицательныхъ ошибокъ требуетъ, чтобы функція $\varphi \epsilon$ была четная; она должна имѣть при предѣлѣ a наименьшую величину равную нулю, и, возрастая непрерывно, достигнуть при

$\epsilon=0$ наибольшей величины. Интегралъ $\int_x^{\infty} \varphi \epsilon d\epsilon$ долженъ обращаться въ нуль для всякой величины

x , болѣе a ; слѣд. $\varphi \epsilon$ принадлежитъ къ числу функцій, въ которыхъ нарушается законъ непрерывности; въ частныхъ случаяхъ можно однако допустить, что функція $\varphi \epsilon$ непрерывна,

но такого рода, что $\int_x^{\infty} \varphi \varepsilon d\varepsilon$ имеет при $x > a$ чрезвычайно малые, пренебрегаемыми величины.

Вѣроятность предѣловъ $\pm \delta$ есть $\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi \varepsilon d\varepsilon$; она пропорціональна числу погрѣшностей, заключающихся между этими предѣлами; такъ какъ $\varphi \varepsilon$ должна быть четная, то

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi \varepsilon d\varepsilon = 2 \int_0^{\delta} \varphi \varepsilon d\varepsilon,$$

т. е. число ошибокъ большихъ и меньшихъ нули одинаково. Каждый интегралъ

$$\int_{-a}^{+a} F \varepsilon \varphi \varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} F \varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

можно представить подъ видомъ

$$\sum F \varepsilon_i \varphi \varepsilon_i d\varepsilon_i$$

гдѣ знакъ суммованія распространяется по указателю i на всевозможныя значенія ε : по свойству $\varphi \varepsilon$ всѣ элементы этого интеграла для $\varepsilon > +a$ и $\varepsilon < -a$ обратятся въ нуль. Произведение $\varphi \varepsilon_i d\varepsilon_i$ означаетъ вѣроятность погрѣшности ε_i , т. е. можетъ быть обозначено въ видѣ дроби $\frac{m_i}{\sum m_i}$, гдѣ m_i есть число случаевъ благопріятныхъ появленію погрѣшности ε_i , а $\sum m_i$ есть постоянная сумма подобныхъ же чиселъ для каждаго значенія погрѣшности. Вслѣдствіе этого:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F \varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon = \frac{\sum m_i F \varepsilon_i}{\sum m_i}.$$

При безконечно большомъ числѣ s наблюденій, по закону большихъ чиселъ, каждая погрѣшность ε_i повторится число разъ, пропорціональное числу m_i ; тогда $\frac{\sum m_i F \varepsilon_i}{\sum m_i}$ обратится въ $\frac{\sum F \varepsilon_i}{s}$, гдѣ подъ $\sum F \varepsilon_i$ разумѣется сумма функций $F \varepsilon_i$, взятыхъ для всѣхъ тѣхъ значеній ε_i , которыя получились при наблюденіяхъ.

Интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} F \varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon$ разлагаются на простѣйшія вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n \varphi \varepsilon d\varepsilon,$$

где n есть целое число: эти последние интегралы выражают в том же смысле арифметическую среднюю из сумм n -ных степеней погрешностей при бесконечно большом числе наблюдений; когда число наблюдений ограничено, то, как будет ниже доказано, они же представляют вероятнейшие величины таких средних арифметических выводов.

Когда функция Fz четная, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Fz \varphi z dz = 2 \int_0^{\infty} Fz \varphi z dz,$$

потому что φz также четная; если же Fz нечетная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} Fz \varphi z dz = 0$, следовательно также

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n \varphi z dz = 0 \text{ для нечетных значений } n.$$

Для более ясного представления общих свойств случайных погрешностей можно построить кривую $y = \varphi x$; абсциссы этой кривой будут числовые величины погрешностей, а ординаты соответствующая им относительная вероятность. Кривая имеет симметричный вид около оси $y=0$ и, приближаясь по обе стороны к оси $x=0$, встречается с нею при

$x = \pm a$; или, если допустить, что $\int_x^{\infty} \varphi z dz$ не обращается в нуль, но только имеет чрез-

вычайно малую величину, кривая продолжает растягиваться по оси x — в весьма близком от нея расстоянии и сливается с нею в бесконечности. Конечная вероятность данных предельно выразится в таком случае частями площади, ограниченной кривою и осью абсциссы, и имеющей величину равную единице.

§ 4.

Помощью наблюдений определяется или непосредственно самая искомая величина, или как-нибудь функция одной или нескольких неизвестных. Займемся прежде всего изысканием наилучшего способа сочетания в простейшем случае непосредственных наблюдений.

Положим, что для определения неизвестной x произведено было большое число s непосредственных, однородных и равного достоинства измерений и что результаты освобождены от постоянных погрешностей; в таком случае для определения x мы имеем s уравнений:

$$x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_r, \dots, x = a_s,$$

из которых не имеем причины предпочесть одних перед другими; величины a разнятся между собою на случайные погрешности наблюдений и потому наилучшее опре-

дѣленіе величины x должно быть составлено симметрично изъ величинъ a_i по такому закону, который соответствовалъ бы свойствамъ случайныхъ погрѣшностей. Подобные выводы носятъ вообще названіе среднихъ; ихъ можно охарактеризовать тѣмъ, что они опредѣляются чрезъ данныя величины a_i помощью уравненія

$$F(\xi, \xi, \dots, \xi) = F(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

гдѣ F означаетъ вѣкоторую симметрическую функцію, а ξ есть средній выводъ, поставленный въ первой части уравненія на мѣсто всѣхъ величинъ a_i . Функція F бываетъ обыкновенно однородная; въ такомъ случаѣ первая часть уравненія обращается въ $K\xi^n$, гдѣ n есть степень однородной функціи, и средній выводъ получаетъ видъ:

$$\xi = \left[\frac{1}{K} \cdot F(a_1, a_2, \dots, a_n) \right]^{\frac{1}{n}};$$

таковы средній геометрической выводъ

$$\xi = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

и средній выводъ изъ n -ыхъ степеней:

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}{n}}.$$

Мы видѣли выше, что изъ свойствъ случайныхъ погрѣшностей для всякой нечетной функціи $F\xi$ слѣдуетъ условіе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\xi \varphi \xi d\xi = 0,$$

которое распадается на простѣйшія вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n \varphi \xi d\xi = 0,$$

гдѣ n есть число нечетное. Если погрѣшности имѣютъ вполнѣ случайный характеръ и если число наблюдений безконечно велико, то это условіе, какъ мы видѣли, равносильно съ уравненіемъ:

$$\frac{\sum \xi_i^n}{n} = 0.$$

При обыкновенныхъ обстоятельствахъ мы не имѣемъ права сдѣлать такого заключенія въ точномъ смыслѣ, но если наблюдения хорошо освобождены отъ постоянныхъ погрѣшностей и если число ихъ значительно, то естественно допустить, что $\frac{\sum \xi_i^n}{n}$ если не равна нулю, то по крайней мѣрѣ имѣетъ чрезвычайно малую величину. Поэтому, называя чрезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n$ погрѣшности въ опредѣленіи величинъ $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$, будемъ весьма вѣроятно опредѣленіе

x изъ уравненій $x - a_1 = \varepsilon_1; x - a_2 = \varepsilon_2; \dots; x - a_i = \varepsilon_i; \dots; x - a_s = \varepsilon_s$, похъ условіемъ что сумма нечетныхъ степеней погрѣшностей ε_i равна нулю. Называя величину x опредѣленную такимъ образомъ помощію степеней $2m - 1$ черезъ ξ_{2m-1} , получимъ для опредѣленія ξ_{2m-1} уравненіе

$$\sum \varepsilon_i^{2m-1} = \sum (\xi_{2m-1} - a_i)^{2m-1} = 0,$$

гдѣ знакъ Σ распространяется на всѣ значенія i по порядку наблюденій отъ 1 до s . Въ простѣйшемъ случаѣ $m = 1$ мы имѣемъ

$$\Sigma (\xi_1 - a_i) = 0,$$

откуда

$$\xi_1 = \frac{\Sigma a_i}{s}.$$

При всякомъ другомъ значеніи m условіе $\sum \varepsilon_i^{2m-1} = 0$ приводитъ для опредѣленія ξ_{2m-1} къ чрезвычайно сложнымъ уравненіямъ высшихъ степеней и не даетъ для величины ξ_{2m-1} соответствующаго простѣйшаго вывода:

$$\left[\frac{\Sigma a_i^{2m-1}}{s} \right]^{\frac{1}{2m-1}}$$

поэтому наиболѣеудѣйственнымъ результатомъ считается всегда выводъ ξ_1 , который называется *среднимъ арифметическимъ выводомъ* или *арифметическою средою*. Арифметическая среда есть безъ сомнѣнія самое простое и самое естественное изъ всѣхъ возможныхъ сочетаній и потому издавна употреблялась для опредѣленія неизвѣстныхъ изъ многочисленныхъ непосредственныхъ данныхъ.

Погрѣшность арифметическаго вывода есть $\frac{\Sigma \varepsilon_i}{s}$; вѣроятность, чтобы она равнялась именно нулю безконечно мала; но эта погрѣшность необходимо очень мала при большомъ числѣ хорошаго достоинства наблюденій. Чтобы показать яснѣе значеніе средняго арифметическаго вывода въ зависимости отъ числа и достоинства наблюденій и вѣстѣ съ тѣмъ опредѣлить благонадежность его въ сравненіи съ другими выводами, опредѣляемыми изъ условий $\Sigma \varepsilon_i^{2m-1} = 0$; рѣшимъ слѣдующій общій вопросъ: найти вѣроятность предположенія, что сумма нечетныхъ степеней случайныхъ погрѣшностей наблюденій не превышаетъ данного предѣла. Этотъ важный вопросъ былъ разрѣшенъ Лапласомъ для суммы первыхъ степеней погрѣшностей; его рѣшеніе представляетъ намъ единственное и совершенно полное доказательство правила арифметической среды. Весьма легко обобщить анализъ Лапласа и приимѣнъ его къ суммѣ всякихъ нечетныхъ степеней.

§ 5.

Прежде нежели приступимъ къ разрѣшенію предположеннаго вопроса сдѣлаемъ небольшое отступленіе для того, чтобы приготовить нѣкоторыя формулы, необходимыя выслѣдствіи.

Слѣдующему общему обозначенію, положимъ:

$$\int_0^1 \left[\lg \left(\frac{1}{x} \right) \right]^{p-1} dx = \Gamma(p)$$

$$\int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy = B(p, q);$$

определенные интегралы $B(p, q)$ и $\Gamma(p)$ известны под именем Эйлеровых интегралов первого и второго рода. Если положим $\lg \frac{1}{x} = z$ в выражении $\Gamma(p)$ и $y = \frac{1}{1+x}$ в выражении $B(p, q)$, то найдем:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} x^{p-1} (1+x)^{-(p+q)} dx.$$

Разложение по частям интеграла $\Gamma(p)$ дает уравнение

$$\Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1).$$

Вставим в $\Gamma(p)$ вместо x величину xz и вместо dx величину $x dz$, получим

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-xz} dz = \frac{\Gamma(p)}{x^p}$$

Положим $z = 1+x$, и заменим p суммой $p+q$, тогда выдет:

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} x^{p+q-1} e^{-(1+x)z} dz;$$

умножая это выражение на $x^{p-1} dx$ и интегрируя между пределами 0 и ∞ , найдем:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} (1+x)^{-(p+q)} dx = B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} x^{p+q-1} e^{-z} dz \cdot \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-zx} dx.$$

или

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} \frac{x^{p+q-1} e^{-z} dz}{z^p}.$$

откуда получаем наконец известное соотношение Эйлеровых интегралов:

$$\Gamma(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Въ случаѣ $p = q = \frac{1}{2}$ эта формула, по причинѣ $\Gamma(1) = 1$, обращается въ

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi;$$

отсюда получимъ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Поставимъ въ выраженіи $\Gamma(p)$ вмѣсто z величину t^2 и слѣд. вмѣсто dz выраженіе $2tdt$, тогда будетъ

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^{\infty} t^{2p-1} e^{-t^2} dt;$$

при $p = \frac{1}{2}$ это уравненіе служитъ къ опредѣленію интеграла $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$ и мы имѣемъ

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Для всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ величинъ p имѣемъ

$$\Gamma(p) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1),$$

слѣд. для нечетныхъ чиселъ n имѣемъ вообще

$$2 \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{n-1}{2}$$

Интегралы $2 \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt$ при четномъ n будутъ зависеть отъ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; потому что

въ этомъ случаѣ $p = \frac{n+1}{2}$ не можетъ сократиться и мы имѣемъ:

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \dots \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

и слѣд. при четномъ n имѣемъ

$$2 \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \sqrt{\pi}$$

Такимъ образомъ при всякомъ n выводить:

$$2 \int_0^{\infty} t^{2m-1} e^{-t^2} dt = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1).$$

и

$$2 \int_0^{\infty} t^{2m} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2m-3}{2} \cdot \frac{2m-1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Изъ уравненія

$$2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

слѣдуетъ очевидно

$$\int_0^{\infty} e^{-(t+a)^2} dt + \int_0^{\infty} e^{-(t-a)^2} dt = \sqrt{\pi};$$

поскоди

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \left(\frac{e^{2at}}{2} + \frac{e^{-2at}}{2} \right) dt = e^{a^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

и, подставивъ сюда вмѣсто a мнимую величину ai , гдѣ $i = \sqrt{-1}$, получимъ

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2at dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}$$

Рѣшеніе вопросовъ, зависящихъ отъ большихъ чиселъ, приводится по большей части къ интегралу

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt.$$

По свойству функции e^{-t^2} убывать чрезвычайно быстро съ возрастанием t , этот интеграл даже при посредственных величинах t чрезвычайно мало отличается от своего предела $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; величины его вычисляются приближенно помощью рядов. Таблицы величины интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

или интеграла

$$\int_0^t e^{-t^2} dt$$

и дополнительнаго къ нему

$$\int_t^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^t e^{-t^2} dt$$

можно найти во многих сочинениях. ¹⁾ — При $t=4$ интеграл $\int_0^4 e^{-t^2} dt$ такъ уже мало

отличается отъ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, что разность

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^4 e^{-t^2} dt = \int_4^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

выходить меньше 0,000000015; даже при $t=3$ разность эта весьма незначительна; она меньше 0,0000196; такимъ образомъ въ приложенияхъ можно безъ замѣтной погрѣшности замѣнять предѣлы интеграла, если они не меньше 3-хъ или 4-хъ, безконечностию. Понятно что тоже свойство имѣютъ интегралы:

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt \text{ и } \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2at dt,$$

хотя и не въ одинаковой степени.

1) Berliner Astronomisches Jahrbuch, 1834. Основанія Теоріи Вѣроятностей Булли-искаго. Exposition de La Théorie des Chances par Cournot и пр.

§ 6.

Нередко нужно бывает исполнить многократное интегрирование такимъ образомъ, чтобы предѣлы распространялись на всѣ значенія переменныхъ, удовлетворяющія некоторымъ даннымъ условіямъ; такое интегрирование можно привести къ безконечнымъ предѣламъ помощью приема предложеннаго Дирихле. Изложимъ главные основанія этого приема.

Если въ определенномъ интегралѣ

$$\int_a^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$$

замѣнивъ a мнимовою величиною $a \mp bi$, то получимъ

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} (\cos bx \pm i \sin bx) dx = \frac{1}{a \mp bi} = \frac{a \pm bi}{a^2 + b^2}$$

отдѣляя въ этомъ выраженіи действительныя величины отъ мнимыхъ, найдемъ

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Помножимъ второй изъ этихъ интеграловъ на da и возьмемъ интегралъ между предѣлами a_1 и a_0 , тогда получимъ

$$\int_{a_1}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} \frac{d}{da} e^{-ax} \sin bx dx = \arctg \frac{a_1}{b} - \arctg \frac{a_0}{b};$$

положимъ здѣсь $a_1 = \infty$ и $a_0 = 0$; тогда

$$\int_0^{\infty} \sin bx \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Къ этому определенному интегралу приводится

$$\int_0^{\infty} \sin bx \cos ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin (b+a)x \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin (b-a)x \frac{dx}{x};$$

при $b > a$ оба интеграла во второй части положительны и равны $\frac{\pi}{2}$, слѣдъ въ этомъ случаѣ

$$\int_0^{\infty} \sin bx \cdot \cos ax \frac{dx}{x} = \pi$$

но если $b < a$, то второй интеграл переменить свой знак и мы получаемъ

$$\int_0^{\infty} \sin bx \cos ax \frac{dx}{x} = 0.$$

Изъ этого мы заключаемъ, что интегралъ

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin bx \cos ax \frac{dx}{x}$$

равняется или единицѣ или нулю, смотря потому будетъ ли b больше или меньше a ; или еще проще интегралъ

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin kx \cos kx \frac{dx}{x}$$

будетъ равенъ единицѣ для всѣхъ величинъ k , заключающихся между предѣлами ± 1 , и равенъ нулю для всѣхъ другихъ значеній k . Записавъ въ интегралѣ

$$\int_0^{\infty} \sin bx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$\sin bx$ его выраженіемъ чрезъ показательныя функціи, можно получить другія выраженія. изъ юція тоже свойство.

$$2 \int_0^{\infty} \sin bx \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{e^{bxi}}{i} \frac{dx}{x} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-bxi}}{i} \frac{dx}{x} = \pi.$$

если положимъ во второмъ интегралѣ $x = -x$, то получимъ

$$2 \int_0^{\infty} \sin bx \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{e^{bxi}}{i} \frac{dx}{x} - \int_0^{-\infty} \frac{e^{bxi}}{i} \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bxi}}{i} \frac{dx}{x} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bxi}}{i} \frac{dx}{x} = \pi;$$

при помощи этихъ равенствъ найдемъ

$$\int_0^{\infty} \sin bx \cos ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+b)xi} \frac{dx}{x} - \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a-b)xi} \frac{dx}{x}$$

или

$$\int_0^{\infty} \sin bx \cos ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{axi} \sin bx \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-axi} \sin bx \frac{dx}{x};$$

сдѣлавъ здѣсь по прежнему $b = 1$ и $a = k$, мы должны заключить, что интегралъ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm kxi} \sin x \frac{dx}{x}$$

равенъ нулю или единицѣ, смотря потому будетъ ли k больше или меньше единицы. Этимъ то свойствомъ.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin x \cos kx \frac{dx}{x} \text{ или } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{kxi} \sin x \frac{dx}{x} \text{ в т. п.}$$

пользуется Д. рикле для преобразования многократныхъ интеграловъ.

Положивъ что требуется найти интегралъ

$$V = \iiint \dots \Phi(z_1, z_2, \dots, z_s) dz_1 dz_2 \dots dz_s,$$

распространяя предѣлы на всѣ значенія переменныхъ z_1, z_2, \dots, z_s , удовлетворяющія условию, что некоторая функция $f(z_1, z_2, \dots, z_s)$ этихъ переменныхъ не превосходитъ по числовой величинѣ данного количества r_1 , тогда дробь $\frac{f(z_1, z_2, \dots, z_s)}{r_1}$ не должна выходить изъ предѣловъ ± 1 . Этому очевидно мы можемъ удовлетворить, помноживъ каждый элементъ интеграла V на функцию

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin x \cos \left[\frac{f(z_1, z_2, \dots, z_s)x}{r_1} \right] \frac{dx}{x} \text{ или на } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_s)x}{r_1}} \sin x \frac{dx}{x}$$

и потомъ распространяя предѣлы интегрированія относительно z_1, z_2, \dots, z_s на всѣ возможные величины этихъ переменныхъ, т. е. взявъ ихъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, потому что при этомъ уничтожаются всѣ элементы, для которыхъ $f(z_1, z_2, \dots, z_s) > r_1$, т. о. мы получаемъ

$$V = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin x \frac{dx}{x} \iiint \dots \Phi(z_1, z_2, \dots, z_s) \cos \left[\frac{f(z_1, z_2, \dots, z_s)x}{r_1} \right] dz_1 dz_2 \dots dz_s$$

или

$$V = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \frac{dx}{x} \iiint \dots \Phi(z_1, z_2, \dots, z_s) e^{\pm \frac{f(z_1, z_2, \dots, z_s)x}{r_1}} dz_1 dz_2 \dots dz_s$$

Если положимъ $\frac{x}{r_1} = a$ и $dx = r_1 da$, то выдеть

$$V = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin r_1 \alpha \frac{d\alpha}{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dots \Phi(x_1, x_2 \dots x_n) \cos \left[\alpha f(x_1, x_2 \dots x_n) \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

или

$$V = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin r_1 \alpha \frac{d\alpha}{\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dots \Phi(x_1, x_2 \dots x_n) e^{\pm \alpha f(x_1, x_2 \dots x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

Выражениям V можно дать еще другой вид, замѣтивъ что

$$\frac{\sin r_1 \alpha}{\alpha} = \frac{e^{r_1 \alpha i} - e^{-r_1 \alpha i}}{2\alpha i} = \frac{1}{2} \int_{-r_1}^{+r_1} \cos r \alpha \cdot dr = \frac{1}{2} \int_{-r_1}^{+r_1} e^{\pm r \alpha i} dr;$$

на основаніи этихъ равенствъ получимъ:

$$V = \frac{1}{\pi} \int_{-r_1}^{+r_1} dr \int_0^{\infty} \cos r \alpha d\alpha \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dots \Phi(x_1, x_2 \dots x_n) \cos \left[\alpha f(x_1, x_2 \dots x_n) \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

или

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-r_1}^{+r_1} dr \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm r \alpha i} d\alpha \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dots \Phi(x_1, x_2 \dots x_n) e^{\pm \alpha f(x_1, x_2 \dots x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

По причинѣ двойнаго знака при показательныхъ функціяхъ во второмъ выраженіи V , можно разсматривать первое выраженіе, какъ частный видъ втораго: въ самомъ дѣлѣ сложивъ два раза выраженія V взятые съ противоположными знаками сперва при $e^{\alpha i f(x_1, x_2 \dots x_n)}$, потомъ при $e^{-\alpha i f(x_1, x_2 \dots x_n)}$ показательныя функціи займются косинусами и предѣлы можно будетъ привести къ одинаковымъ, распространяя ихъ относительно α отъ 0 до ∞ и умножая интегралъ на 2.

Если требуется, чтобы предѣлы многократнаго интеграла распространялись на такія величины переменныхъ, для которыхъ функція $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ оставалась бы меньше r_1 и больше r_2 , то множитель k должно опредѣлить изъ условія:

$$f = \frac{(1+k)r_1 + (1-k)r_2}{2},$$

гдѣ для сокращенія f означаетъ функцію $f(x_1, x_2 \dots x_n)$; при такомъ условіи функція f дѣйствительно обращается въ r_1 только при $k = -1$ и въ r_2 при $k = +1$ и въ промежуткѣ этихъ значеній постоянно возрастаетъ отъ r_1 до r_2 , потому что производная $\frac{df}{dk} = \frac{r_2 - r_1}{2}$ всегда положительна.

Опредѣляя k находимъ

$$k = \frac{f}{\frac{r_2 - r_1}{2}} = \frac{\frac{r_2 + r_1}{2}}{\frac{r_2 - r_1}{2}}$$

и, если положимъ для сокращенія $\frac{r_2 + r_1}{2} = g$ и $\frac{r_2 - r_1}{2} = l$, интеграль

$$V = \iiint \dots \Phi. dx_1, dx_2, \dots dx_n$$

опредѣленный подъ данными условіями обратится въ

$$V = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x. e^{-\frac{gx}{l}} \frac{dx}{x} \iiint \dots \Phi. e^{\frac{fx}{l}} dx_1, dx_2, \dots dx_n.$$

Положимъ $\frac{x}{l} = \alpha$; тогда

$$V = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x. e^{-g\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} \iiint \dots \Phi. e^{f\alpha l} dx_1, dx_2, \dots dx_n,$$

или, записавъ $\frac{\sin \alpha x}{\alpha}$ выраженіемъ $\frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} e^{\pm y\alpha l} dy$,

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\pm y - g)\alpha l} d\alpha \iiint \dots \Phi. e^{f\alpha l} dx_1, dx_2, \dots dx_n$$

Двойной знакъ при y показываетъ, что функція V не измѣнится отъ перемены $+y$ на $-y$; слѣд. можно взять

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^l dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(y-g)\alpha l} d\alpha \iiint \dots \Phi. e^{f\alpha l} dx_1, dx_2, \dots dx_n$$

Отсюда заключаемъ:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(y-g)\alpha l} \iiint \dots \Phi. e^{f\alpha l} dx_1, dx_2, \dots dx_n.$$

Разсмотримъ въ частномъ случаѣ однократный интеграль

$$V = \int \Phi x dx.$$

Пусть его требуется взять относительно z между пределами z и z_0 ; прилагая къ этому случаю теорему Дюрикле, мы имѣемъ:

$$f = z; \quad g = \frac{z + z_0}{2}; \quad l = \frac{z - z_0}{2}; \quad l - g = -z_0; \quad dy = \frac{dz}{2}; \quad \frac{dY}{dz} = \Phi z = \frac{1}{2} \frac{dV}{dy} \quad \text{и}$$

$$V = \int_{z_0}^z \Phi z \, dz = \frac{1}{\pi} \int_0^l dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(y-g)\alpha i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cdot e^{z\alpha i} dz$$

$$\frac{dV}{dy} = 2\Phi z = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(y-g)\alpha i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cdot e^{z\alpha i} dz.$$

Если условіе состоитъ въ томъ, чтобы z равнялся z_0 , то $\frac{dV}{dz} = \Phi z_0$; $y = l = 0$; $y = z_0$ и мы получаемъ выраженіе, известное подъ названіемъ теоремы Фурье:

$$\Phi z_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_0 \alpha i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cdot e^{z\alpha i} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cdot e^{(z-z_0)\alpha i} dz$$

Знакъ величины g можно замѣнять въ одно время съ переменной знака f , не измѣняя величины V ; слѣдъ также

$$\Phi z_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z_0 \alpha i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cdot e^{-z\alpha i} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cdot e^{-(z-z_0)\alpha i} dz$$

или, соединяя оба выраженія Φz_0 въ одно.

$$\Phi z_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cos(z-z_0)\alpha \, dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cos(z-z_0)\alpha \, dz.$$

Такъ какъ здѣсь z_0 можетъ имѣть всякую данную величину, то, сдѣлавъ переменнымъ $z_0 = x$, имѣемъ

$$\Phi x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cos(z-x)\alpha \, dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi z \cos(z-x)\alpha \, dz.$$

Отъ вышеизложеннаго легко перейти къ болѣе общему случаю, когда пределы интеграла

$$V = \iiint \dots \Phi \cdot dz_1 \, dz_2 \dots dz_n$$

должны распространяться на такія величины переменныхъ z_1, z_2, \dots, z_n , для которыхъ нѣкоторыя функціи f_1, f_2, \dots, f_n этихъ переменныхъ соответственно не выходятъ изъ пределовъ $\pm r_1; \pm r_2; \dots, \pm r_n$. Прилагая въ такомъ случаѣ теорему Дюрикле къ каждому условію, имѣемъ:

$$V = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\infty} \sin x_1 \frac{dx_1}{x_1} \int_0^{\infty} \sin x_2 \frac{dx_2}{x_2} \dots \int_0^{\infty} \sin x_n \frac{dx_n}{x_n} \iiint \dots \Phi \cos \frac{f_1 x_1}{r_1} \cos \frac{f_2 x_2}{r_2} \dots \cos \frac{f_n x_n}{r_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

или

$$V = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x_1 \frac{dx_1}{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x_2 \frac{dx_2}{x_2} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x_n \frac{dx_n}{x_n} \iiint \dots \Phi e^{i \left[\frac{f_1 x_1}{r_1} + \frac{f_2 x_2}{r_2} + \dots + \frac{f_n x_n}{r_n} \right]} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

положивъ $\frac{x_1}{r_1} = \alpha_1$; $dx_1 = r_1 d\alpha_1$; $\frac{x_2}{r_2} = \alpha_2$. $dx_2 = r_2 d\alpha_2$ и т. л.

$$V = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\infty} \sin r_1 \alpha_1 \frac{dx_1}{\alpha_1} \int_0^{\infty} \sin r_2 \alpha_2 \frac{dx_2}{\alpha_2} \dots \int_0^{\infty} \sin r_n \alpha_n \frac{dx_n}{\alpha_n} \iiint \dots \Phi \cdot \cos f_1 \alpha_1 \cos f_2 \alpha_2 \dots \cos f_n \alpha_n dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

или

$$V = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin r_1 \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin r_2 \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{\alpha_2} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \sin r_n \alpha_n \frac{d\alpha_n}{\alpha_n} \iiint \dots \Phi \cdot e^{i [f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + \dots + f_n \alpha_n]} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

или, выражая помощью dr_1, dr_2, \dots

$$V = \frac{1}{\pi^n} \int_{-r_1}^{+r_1} dr_1 \int_{-r_2}^{+r_2} dr_2 \dots \int_{-r_n}^{+r_n} dr_n \int_0^{\infty} \cos r_1 \alpha_1 d\alpha_1 \dots \int_0^{\infty} \cos r_n \alpha_n d\alpha_n \iiint \dots \Phi \cdot \cos f_1 \alpha_1 \cos f_2 \alpha_2 \dots \cos f_n \alpha_n dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$V = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-r_1}^{+r_1} dr_1 \int_{-r_2}^{+r_2} dr_2 \dots \int_{-r_n}^{+r_n} dr_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_1 \alpha_1 i} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_2 \alpha_2 i} d\alpha_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_n \alpha_n i} d\alpha_n \iiint \dots \Phi \cdot e^{i [f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + \dots + f_n \alpha_n]} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Подобным же образом можно обобщить и всё другие выражения, выведенные для одного условия.

§ 7.

Обратимся къ изысканию вѣроятности предположенія, что сумма нечетныхъ степеней погрѣшностей многочисленныхъ наблюдений заключается между данными предѣлами. Рассмотрим сначала рѣшеніе этого вопроса тѣмъ способомъ, который Лапласъ прилагалъ къ рѣшенію всѣхъ вопросовъ подобнаго рода.

Представимъ себѣ, что выраженіе

$$\left[x^{\varepsilon_1^n} + x^{\varepsilon_2^n} + \dots + x^{\varepsilon_m^n} \right]^s = \left[\sum_{i=1}^{i=m} x^{\varepsilon_i^n} \right]^s,$$

где z есть целое число, разложено по степеням x и пусть будет A_l коэффициент при x^l . Если бы мы исполнили это разложение помощью простого умножения и до конца не соединили бы подобных членовъ, то коэффициенты при степеняхъ x оставались бы до конца равными единицамъ; изъ этого мы заключаемъ что A_l означаетъ число членовъ разложения, показатели которыхъ, содержа z слагаемыхъ взятыхъ изъ ряда величинъ $\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n \dots \varepsilon_m^n$, равны l . Ясно, что въ разложение войдутъ всѣ возможные суммы такого рода и слѣд. A_l есть число всевозможныхъ сочетаній изъ количества $\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n \dots \varepsilon_m^n$ съ повтореніями, удовлетворяющихъ условию, что сумма входящихъ въ нихъ членовъ, равна l . Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m$ означаютъ всѣ возможные равновѣроятныя погрѣшности наблюдений, число которыхъ есть z ; тогда A_l будетъ выражать число случаевъ, благоприятныхъ предположенію, что сумма z -ыхъ степеней погрѣшностей равна l . Если положимъ $x=1$, то вторая часть разложения обратится въ число всѣхъ возможныхъ предположеній о величинѣ l , которое, какъ видно изъ первой части разложения будетъ равно m^z ; такъ что $\frac{A_l}{m^z}$ выразитъ вѣроятность суммы z -ыхъ степеней, равной l . Чтобы распространить это заключеніе на случай неравновѣроятныхъ погрѣшностей, положимъ, что въ ряду $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ находится α_1 ошибокъ равныхъ ε_1, α_2 равныхъ ε_2 и т. д. Тогда вѣроятность суммы l опредѣлится изъ разложения

$$\left[\sum \alpha_i x^{\varepsilon_i^n} \right]^z = \text{сумма членовъ вида } A_l x^l$$

и будетъ $\frac{A_l}{(\sum \alpha_i)^z}$. Въ этомъ случаѣ коэффициенты α_i пропорциональны простымъ вѣроятностямъ соответствующихъ погрѣшностей; если означимъ эти вѣроятности черезъ β_i и вѣроятности суммъ z -ыхъ степеней погрѣшностей черезъ B_l ; т. е. положимъ

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_i} \quad \text{и} \quad B_l = \frac{A_l}{(\sum \alpha_i)^z}$$

предыдущее разложение приметъ видъ:

$$\left[\sum \beta_i x^{\varepsilon_i^n} \right]^z = \text{сумма членовъ вида } B_l x^l$$

Если между погрѣшностями ε_i находится одинаковое число положительныхъ и отрицательныхъ имѣющихъ при одинаковой числовой величинѣ одинакия вѣроятности, то всякому положительному показателю l будетъ соответствовать необходимо отрицательный $-l$ и коэффициенты при членахъ x^l и x^{-l} будутъ одинаковы, такъ что въ этомъ случаѣ мы получимъ, распространяя сумму Σ на прежніе предѣлы:

$$\left[\frac{1}{2} \sum \beta_i \left(x^{\varepsilon_i^n} + x^{-\varepsilon_i^n} \right) \right]^z = \text{сумма членовъ вида } B_l (x^l + x^{-l});$$

здѣсь z предполагается по смыслу задачи числомъ нечетнымъ. Сдѣлаемъ $x = e^{i\theta}$:

$$\left[\sum \beta_i \cos \varepsilon_i^n \theta \right]^z = \text{сумма членовъ вида } 2B_l \cos l\theta$$

При переходѣ къ непрерывному измененію величины ε_i сумма обратится въ интегралъ, распространенный на предѣлы возможныхъ погрѣшностей и $\beta_i = \varphi(\varepsilon_i) d\varepsilon_i$, слѣдовательно

$$\left[\int_{-a}^{+a} \varphi \varepsilon \cos \varepsilon^n \theta. d\varepsilon \right]^2 = \text{сумма членовъ вида } 2B_l \cos l\theta.$$

или по свойству функций $\varphi \varepsilon$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cos \varepsilon^n \theta d\varepsilon \right]^2 = \text{сумма членовъ вида } 2B_l \cos l\theta$$

Для отдѣленія вѣроятности B_l воспользуемся свойствомъ опредѣленнаго интеграла:

$$\int_0^\pi \cos l\theta. \cos \lambda \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos (l+\lambda) \theta. d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos (l-\lambda) \theta. d\theta,$$

который обращается въ $\frac{\pi}{2}$ при $\lambda=l$ и въ нуль для всѣхъ цѣлыхъ значений l и λ . Такъ какъ сумма во второй части нашего разложениа также непрерывна и l имѣетъ всѣ возможныя величины между известными предѣлами; то для того, чтобы приложить свойство этого интеграла къ нашему случаю, допустимъ что величина l возрастаетъ на безконечно малыя постоянныя разности dl , т. е. имѣетъ величины: $0, \pm dl, \pm 2dl, \dots, l=tdl, (t+1) dl \dots$ Подставимъ вмѣсто l величину tdl , гдѣ t есть для всѣхъ значений t цѣлое число, и сдѣлавъ $\theta dl = \psi$, получимъ

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cos \varepsilon^n \theta d\varepsilon \right]^2 = \text{сумма членовъ вида } 2B_l \cos t\psi.$$

Помножимъ обѣ части этого равенства на $\cos t\psi d\psi$ и возьмемъ интегралъ отъ $\psi=0$ до $\psi=\pi$. тогда во второй части останется только B_l . т. и слѣд

$$B_l = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t\psi d\psi. \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cos \varepsilon^n \theta. d\varepsilon \right]^2$$

и, подставивъ опять $t\psi = l\theta$, $d\psi = d\theta. dl$, получимъ

$$B_l = \frac{dl}{\pi} \int_0^\pi \cos l\theta. d\theta \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cos \varepsilon^n \theta. d\varepsilon \right]^2 = P_l dl.$$

Такое выраженіе вѣроятности, что сумма нечетныхъ l степеней погрѣшностей наблюдений равна числу l . Чтобы найти вѣроятность, что эта сумма заключается между предѣлами $+l$. должно очевидно взять сумму вѣроятностей B_l между этими предѣлами и, какъ какъ l измѣняется непрерывно, то мы имѣемъ

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} dl \int_0^\pi \cos \theta d\theta \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cdot \cos \varepsilon^m \theta d\varepsilon \right]^n$$

§ 8.

Этот прием, который Лаплас постоянно употреблял для решения вопросов подобного рода, в сущности одинаков с более общим и удобным способом Дирикле. Чтобы приложить этот последний способ к решению нашего вопроса, заметим, что если вероятность какой нибудь погрешности ε_i есть $\varphi \varepsilon_i d\varepsilon_i$, то вероятность известной системы погрешностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ выразится произведением

$$\varphi \varepsilon_1 \varphi \varepsilon_2 \dots \varphi \varepsilon_s \cdot d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_s$$

и вероятность, что погрешности заключаются между некоторыми пределами будет:

$$p_n = \iiint \dots \varphi \varepsilon_1 \varphi \varepsilon_2 \dots \varphi \varepsilon_s \cdot d\varepsilon_1 \cdot d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_s$$

Согласно с требованием вопроса интегралы должно распространить на все величины ε_i , для которых $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \dots + \varepsilon_s^n$ заключаются между пределами $\pm l$, или функция

$$\frac{\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \dots + \varepsilon_s^n}{l}$$

между пределами ± 1 ; по этому помножая элемент интеграла p_n на функцию

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin x \frac{dx}{x} \cdot e^{kx}, \text{ где } k = \frac{\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \dots + \varepsilon_s^n}{l},$$

полагая $\frac{x}{l} = \theta$ и отделяя интегралы относительно каждого переменного, получим по способу Дирикле

$$p_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \theta \frac{d\theta}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_1 e^{i\theta \varepsilon_1^n} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_2 e^{i\theta \varepsilon_2^n} d\varepsilon_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_s e^{i\theta \varepsilon_s^n} d\varepsilon_s;$$

при нечетном n имеем очевидно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_i e^{i\theta \varepsilon_i^n} d\varepsilon_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_i \cos \varepsilon_i^n \theta d\varepsilon_i$$

и, так как все интегралы относительно ε между одинаковыми пределами равны между собою, то мы имеем:

$$p_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \theta l \cdot \frac{d\theta}{\theta} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cdot \cos \varepsilon^{n\theta} d\varepsilon \right]^2;$$

наконецъ, подставляя

$$\frac{\sin l\theta}{\theta} = \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} \cos \theta d l,$$

мы получимъ вышенайденное выраженіе:

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} d l \int_0^{\infty} \cos \theta d \theta \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cdot \cos \varepsilon^{n\theta} d\varepsilon \right]^2 = \int_{-l}^{+l} P_l d l.$$

Дифференціалъ $P_l d l$ означаетъ, какъ мы видѣли, безконечно малую вѣроятность суммы l , производную P_l можно поэтому назвать относительною вѣроятностію суммы l .

§ 9.

Для приближеннаго исчисленія P_l разложимъ $\cos \varepsilon^{n\theta}$ въ рядъ

$$\cos \varepsilon^{n\theta} = 1 - \frac{\varepsilon^{2n} \theta^2}{1 \cdot 2} + \frac{\varepsilon^{4n} \theta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\varepsilon^{6n} \theta^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

и положимъ вообще

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cdot \varepsilon^k d\varepsilon = \mu_k;$$

мы уже видѣли, что количества μ_k суть средніе арифметическіе выходы изъ степеней погрѣшностей и что для нечетныхъ k имѣемъ вообще $\mu_k = 0$. Замѣняя $\cos \varepsilon^{n\theta}$ его разложениемъ получимъ

$$P_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{\mu_{2n} \theta^2}{1 \cdot 2} + \frac{\mu_{4n} \theta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\mu_{6n} \theta^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right]^2 \cos \theta d \theta;$$

предположивъ число n наблюденій столь большимъ, чтобы можно было пренебрегать членами дѣленными на n , и расположимъ исчисленіе такимъ образомъ, чтобы обнаружить въ выраженіи P_l подобнаго рода члены. Прежде всего преобразуемъ степень

$$\left[1 - \frac{\mu_{2n} \theta^2}{1 \cdot 2} + \frac{\mu_{4n} \theta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right]^2 = e^{t^2};$$

въ показательную функцію на основаніи уравненія:

$$e^x = e^{s \lg(x)};$$

разложив $l\theta$ в ряд, получимъ

$$P_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2} e^{-s \left[\frac{3\mu_{2n}^2 - \mu_{2n}^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \theta^4 + \frac{30\mu_{2n}^2 - 15\mu_{2n}\mu_{2n} + \mu_{2n}^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \theta^6 + \dots \right]} \cos \theta \cdot d\theta$$

и возвращая снова вторую показательную функцию в форму ряда:

$$P_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2} \cos \theta d\theta - A \int_0^{\infty} e^{-\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2} \cos \theta d\theta - B \int_0^{\infty} e^{-\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2} \cos \theta d\theta + \dots,$$

гдѣ $A, B \dots$ суть коэффициенты не зависящія отъ s . Положимъ $\frac{s\mu_{2n}}{2}\theta^2 = t^2$ и следовательно

$d\theta = dt \cdot \sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}}$, получимъ

$$P_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos \left(lt \sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}} \right) dt - \frac{M}{s} - \frac{N}{s^2} + \dots;$$

Коэффициенты $M, N \dots$ выражаются очень просто помощью интеграловъ вида $\int_0^{\infty} \theta^n e^{-a\theta^2} d\theta$,

но нѣтъ ни какой надобности раскрывать этихъ выраженій; безъ этого видно что они имѣютъ не болѣе какъ посредственную величину, поэтому мы можемъ при большомъ s откинуть члены $\frac{M}{s}, \frac{N}{s^2}$ и пр. тогда

$$P_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos \left(lt \sqrt{\frac{2}{s\mu_{2n}}} \right) dt$$

входящій сюда определенный интегралъ равенъ (§ 5) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{l^2}{2s\mu_{2n}}}$

и потому

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\mu_{2n}}} e^{-\frac{l^2}{2s\mu_{2n}}}$$

Изъ этого выраженія мы можемъ заключить, что, согласно съ свойствами случайныхъ погрѣшностей, наиболѣе вероятная величина суммы нечетныхъ степеней погрѣшностей при большомъ числѣ наблюдений есть нуль. Если бы мы имѣли право допустить эту формулу для всякаго числа наблюдений, то, полагая въ ней $s=1$, получили бы относительную вероятностъ каждой погрѣшности

$$\varphi\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_{2n}}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^{2n}}{2\mu_{2n}}},$$

что, как увидим ниже, для случая когда $n=1$, было доказано Гауссом на основании других соображений

Вставляя найденное выражение P_1 въ величину p_n , получимъ

$$p_n = \int_{-t}^{+t} P_1 dl = 2 \int_0^t P_1 dl = \sqrt{\frac{2}{\pi s \mu_{2n}}} \int_0^t e^{-2s\mu_{2n} dl^2} dl;$$

сдѣлаемъ

$$\frac{l^2}{2s\mu_{2n}} = t^2; \quad l = t \sqrt{2s\mu_{2n}} \quad \text{и} \quad dl = dt \sqrt{2s\mu_{2n}}.$$

тогда выдетъ

$$p_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

Таково выражение вѣроятности, что $\Sigma \varepsilon_i^n$ не превосходитъ въ числовой величинѣ предѣла $t = t \sqrt{2s\mu_{2n}}$, или, что средняя величина $\frac{\Sigma \varepsilon_i^n}{s}$ не превосходитъ $\frac{t \sqrt{2\mu_{2n}}}{\sqrt{s}}$.

§ 10.

При посредственныхъ величинахъ t , напр. при $t=3, 4, \dots$, вѣроятность p_n становится чрезвычайно близкою къ достоверности и мы можемъ быть вполне увѣрены, что $\frac{\Sigma \varepsilon_i^n}{s}$ не превзойдетъ предѣла $\frac{4 \sqrt{2\mu_{2n}}}{\sqrt{s}}$. Мы видимъ, что величина этого предѣла будетъ тѣмъ менѣе и сдѣловательно предположеніе $\Sigma \varepsilon_i^n = 0$ тѣмъ благонадежнѣе, тѣмъ болѣе число наблюдений и тѣмъ менѣе средняя величина μ_{2n} . При $n=1$ получаемъ вѣроятность

$$p_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

что погрѣшность арифметическаго вывода $\frac{\Sigma \varepsilon_i}{s}$ не превзойдетъ предѣла $\frac{t \sqrt{2\mu_2}}{\sqrt{s}}$. Такъ какъ погрѣшности наблюдений бываютъ обыкновенно очень малыя величины, то вообще $\mu_{2n} < \mu_2$, сдѣловательно съ большою выгодною можно бы было опредѣлять невѣдѣныя изъ непосредственныхъ наблюдений на основаніи предположеній $\Sigma \varepsilon_i^n = 0$ при n большихъ единицы, но мы уже замѣтили, что это приводитъ къ невыполнимымъ исчисленіямъ. Изъ таблицъ интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

помощью интерполирования находить, что этот интеграл равен $\frac{1}{2}$, когда $t = 0,47694$; след с одинаково вероятностью можем ожидать, что погрешность арифметического вывода будет больше или меньше

$$r = 0,47694 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu_2}{s}} = 0,67449 \cdot \sqrt{\frac{\mu_2}{s}};$$

величину r называют *вероятною ошибкою*. Для всякой величины вероятности p , погрешность арифметического вывода обратно пропорциональна квадратному корню из числа наблюдений и прямо пропорциональна количеству $\sqrt{\mu_2}$, которое Гаусс назвал *среднею ошибкою*. Когда способы наблюдений весьма точны, то ошибки бывают очень малы, след. и средняя ошибка есть очень малая величина; если притом произведено значительное число наблюдений, то наибольшая возможная погрешность арифметического вывода $t \sqrt{\frac{2\mu_2}{V s}}$

даже при t равном 3 или 4 весьма незначительна и в этом случае мы можем с достоверностью полагать, что действительная погрешность будет меньше этой величины; след. сочетание непосредственных наблюдений по правилу арифметической среды освобождает результат от влияния случайных изменений тем в большей мере, тем точнее способы наблюдений и тем больше число их.

Средняя ошибка $\sqrt{\mu_2}$ и вообще средняя величины μ_n могут быть приблизительно вычислены из таких наблюдений, действительная погрешности которых известны. При достаточном числе таких наблюдений можно интеграл

$$\mu_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cdot \varepsilon^{2n} d\varepsilon$$

заменить суммою

$$\frac{\varepsilon_1^{2n} + \varepsilon_2^{2n} + \dots + \varepsilon_s^{2n}}{s} = \frac{\sum \varepsilon_i^{2n}}{s}.$$

Чтобы судить о том, какой погрешности можно ожидать от такого замещения, решим вопрос подобный предыдущему: определим вероятность, что сумма четных степеней погрешностей не выходит из данных предельов. Если возьмем для показателя степени погрешности вообще целое число n , то в этом вопросе будет заключаться также другой, относящийся к нечетным значениям n , именно определение вероятности, что сумма нечетных степеней погрешностей, взятых с одинаковыми знаками, не превышает данного предела.

§ 11.

Вероятная величина суммы четных степеней погрешностей, или нечетных взятых с одинаковыми знаками, без сомнения не будет нуль; поэтому возьмем интеграл

$$p'_n = \iiint \dots \varphi \varepsilon_1 \varphi \varepsilon_2 \dots \varphi \varepsilon_s \cdot d\varepsilon_1 \cdot d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_s$$

между такими предѣлами, для которыхъ сумма $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \dots + \varepsilon_s^n$, члены которой взяты существенно положительными, не выходитъ изъ предѣловъ $S_n = l$. Къ рѣшенію этого вопроса можно прибавить формулу (§ 6).

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\theta) ai} d\alpha \iiint \dots \Phi \cdot e^{fai} dz \cdot dx_2 \dots dx_s$$

Въ нашемъ случаѣ l имѣетъ очевидно тоже значеніе, какъ и въ этой формулѣ; $g = S_n$; $f = \varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \dots + \varepsilon_s^n$ и слѣд.

$$p'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(S_n + y) ai} d\alpha \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon e^{\varepsilon^n ai} d\varepsilon \right]^s = \int_{-l}^{+l} P_y dy;$$

величина $P_y dy$ означаетъ очевидно вѣроятность, что сумма $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \dots + \varepsilon_s^n$ равна именно числу $S_n + y$ и P_y есть относительная вѣроятность такого предположенія. Означимъ для краткости $S_n + y$ черезъ L и сдѣлаемъ приближенное исчисленіе P_y , пренебрегая членами дѣльными на очень большое число наблюдений s . Разложимъ въ рядъ функцию $e^{\varepsilon^n ai}$ в оз-

начимъ для нечетнаго n интегралъ $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon \cdot \varepsilon^n d\varepsilon$, въ которомъ, по условію, ε^n для всѣхъ величинъ ε взято съ положительнымъ знакомъ, черезъ μ_n ; т. е. положимъ

$$\mu_n = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon^n \varphi \varepsilon d\varepsilon;$$

эта величина μ_n для нечетнаго n будетъ отлична отъ введеннаго прежде обозначенія ея, при которомъ μ_n было всегда равно нулю. Такимъ образомъ получимъ

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Lai} \left[1 + \mu_n ai - \mu_{2n} \frac{\alpha^2}{2} - \mu_{3n} \frac{\alpha^3}{6} \cdot i + \dots \right]^s dx;$$

обращая степень ряда въ показательную функцию и довольствуясь въ показателѣ второю степенью α , а остальные члены обращая снова въ рядъ, найдемъ

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Lai} + s\mu_n ai - s(\mu_{2n} - \mu_n^2) \frac{\alpha^2}{2} [1 + s A \alpha^2 i + s B \alpha^4 + \dots] dx,$$

гдѣ A, B, \dots суть коэффициенты не зависящія отъ ϵ

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s\mu_n - L)\alpha i - s(\mu_{1n} - \mu_n^2) \frac{\alpha^2}{2}} dx + \frac{si}{2\pi} A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s\mu_n - L)\alpha i - s(\mu_{1n} - \mu_n^2) \frac{\alpha^2}{2}} \alpha^2 dx + \dots$$

Дополняя показателя при ϵ до полного квадрата, найдемъ

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \epsilon \frac{(L - s\mu_n)^2}{2s(\mu_{1n} - \mu_n^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\alpha \sqrt{\frac{s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}{2}} + \frac{(L - s\mu_n)}{\sqrt{2s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}} \right]^2 dx + s A_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i d \alpha^2} dx + \dots ;$$

если подставимъ на мѣсто показателя при ϵ подъ интеграломъ величину $-i^2$, то будетъ

$$dx = dt \cdot \sqrt{\frac{2}{s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}}$$

и мы получимъ:

$$P_y = \frac{1}{\pi \sqrt{2s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}} \epsilon^{-\frac{(L - s\mu_n)^2}{2s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i^2 t^2} dt + \frac{M}{s} + \frac{N}{s^2} + \dots$$

Отбрасывая члены $\frac{M}{s}, \frac{N}{s^2}$ и пр. и записавъ интегралъ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i^2 t^2} dt$ его величиною $\sqrt{\pi}$, по-

лучимъ наконецъ вставляя величину L :

$$P_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}} \epsilon^{-\frac{(y + S_n - s\mu_n)^2}{2s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}}$$

Изъ этого выраженія видно, что вѣроятнѣйшая величина суммы $S_n + y = \Sigma \epsilon_i^n$ есть $s\mu_n$, следовательно вѣроятнѣйшая величина $\frac{\Sigma \epsilon_i^n}{s}$ есть μ_n . Мы означали черезъ S_n какую нибудь данную величину; положивъ теперь $S_n = s\mu_n$, найдемъ для вѣроятности, что $\Sigma \epsilon_i^n$ равна $s\mu_n + y$, выраженіе

$$P'_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}} \epsilon^{-\frac{y^2}{2s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}}$$

Вѣроятность P'_n , что сумма $\Sigma \epsilon_i^n$ заключается между предѣлами $s\mu_n \pm l$, будетъ тогда

$$P'_n = \int_{-l}^{+l} P'_y dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}} \int_{-l}^{+l} \epsilon^{-\frac{y^2}{2s(\mu_{1n} - \mu_n^2)}} dy$$

или

$$p'_n = \sqrt{\frac{2}{\pi s (\mu_{2n} - \mu_n^2)}} \int_0^t e^{-\frac{y^2}{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} dy$$

Если сделаем $\frac{y}{\sqrt{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}} = t$, то получим вероятность

$$p'_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

что сумма $\sum \varepsilon_i^n$ не выходит из пределов $\pm \mu_n \pm t \sqrt{2s(\mu_{2n} - \mu_n^2)}$, или, что величина $\frac{\sum \varepsilon_i^n}{s}$ остается в пределах

$$\mu_n \pm t \sqrt{\frac{2}{s} (\mu_{2n} - \mu_n^2)} - \mu_n \left[1 \pm t \sqrt{\frac{2}{s} \left(\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} - 1 \right)} \right]$$

Съ вероятностию, равной половинѣ, можемъ мы следовательно предполагать, что погрѣшность, происходящая при замѣненіи интеграла μ_n суммою $\frac{\sum \varepsilon_i^n}{s}$, не превзойдетъ

$$\pm 0,47694 \sqrt{\frac{2}{s} (\mu_{2n} - \mu_n^2)},$$

и почти достоверно, что эта погрѣшность менѣе $3 \sqrt{\frac{2}{s} (\mu_{2n} - \mu_n^2)}$. При очень большомъ

числѣ наблюдений $\sqrt{\frac{2}{s} (\mu_{2n} - \mu_n^2)}$ имѣетъ чрезвычайно малую величину и интегралъ μ_n

очень мало будетъ разниться отъ $\frac{\sum \varepsilon_i^n}{s}$.

Такимъ образомъ средняя ошибка $\sqrt{\mu_2}$, отъ которой зависитъ опредѣленіе точности арифметическаго вывода можетъ быть вычислена изъ наблюдений, которыхъ погрѣшности извѣстны, и величина ея съ вероятностию равной половинѣ будетъ заключаться между предѣлами

$$\sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{s}} \cdot \left[1 \pm 0,47694 \sqrt{\frac{2}{s} \left(\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} - 1 \right)} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

или приближенно

$$\sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{s}} \cdot \left[1 \pm \frac{0,67449}{\sum \varepsilon_i^2} \sqrt{\sum \varepsilon_i^2 - \frac{(\sum \varepsilon_i)^2}{s}} \right].$$

§ 12.

Предположимъ, что между количествами $a_1, a_2 \dots a_s$, найденными изъ s наблюдений равнаго достоинства для неизвѣстной x , оказалось p_1 равныхъ a_1 , p_2 равныхъ a_2 и т. д., тогда средней арифметической выводъ

$$\xi_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_s}{s} = \frac{\sum_1 a_i}{s}$$

обратится въ

$$\xi_1 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots}{p_1 + p_2 + \dots} = \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i}$$

Такой видъ арифметическаго вывода доставляетъ намъ возможность распространить правило арифметической среды на тотъ случай, когда наблюденія, непосредственно опредѣляющія величину x , не одинаковаго достоинства. Мы видѣли, что для наблюдений равнаго достоинства благонадежность результата возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ наблюдений: слѣд. повторя наблюдение меньшаго достоинства достаточное число разъ, мы можемъ достигнуть до столь же благонадежнаго результата, какъ и тотъ, который полученъ съ помощью болѣе точнаго способа наблюдений; такъ что, можно всѣ наблюденія привести къ одной мѣрѣ благонадежности, замѣняя результаты лучшихъ наблюдений большимъ, а результаты худшихъ наблюдений меньшимъ числомъ наблюдений известнаго достоинства т. е. умножая каждый результатъ на число, выражающее его относительное достоинство; по правилу арифметической среды найдемъ тогда:

$$\xi_1 = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots}{p_1 + p_2 + \dots} = \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i},$$

гдѣ коэффициенты p_i суть числа пропорціональныя достоинствамъ каждаго опредѣленія a_i въ сказанномъ смыслѣ. По сходству выраженія ξ_1 съ разстоянiемъ отъ нѣкоторой плоскости центра тяжести вѣсовъ p_i , помѣщенныхъ на разстоянiяхъ a_i отъ той же плоскости, множителемъ p_i называются вѣсами опредѣленій a_i , или вѣсами соответствующихъ имъ способовъ наблюдений. Вѣсъ арифметическаго вывода ξ_1 равенъ очевидно $\sum p_i$, т. е. суммѣ вѣсовъ отдѣльныхъ опредѣленій. Вѣсы суть числа относительныя и могутъ быть выражены въ произвольныхъ единицахъ, потому что количество ξ_1 не измѣняется отъ помноженія всѣхъ p_i на произвольнаго постояннаго множителя.

§ 13

Мы уже видѣли, что довѣрiе къ арифметическому выводу, кромѣ числа наблюдений, зависитъ еще отъ средней ошибки наблюдений $m = \sqrt{\mu_2}$. Чтобы найти соотношенiе между вѣсомъ и средней ошибкою, положимъ, что p_1 есть вѣсъ вывода извлеченнаго изъ s_1 одинаковаго достоинства наблюдений, имѣющихъ среднюю ошибку m_1 ; p_2 вѣсъ другаго вывода изъ s_2 наблюдений съ среднею ошибкою m_2 и т. д. Если назовемъ черезъ $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ числа наблюдений равнаго достоинства т. е. имѣющихъ общую среднюю ошибку μ , необходимыя для того, чтобы выведенные результаты имѣли одинаковую степень точности или одинаковую вѣроятность, то изъ повлiя о вѣсахъ имѣемъ:

$$p_1 : p_2 : p_3 : \dots = \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \dots$$

Погрѣшность первого ряда наблюдений для всякой данной вероятности пропорциональна $\frac{m_1}{\sqrt{s_1}}$; чтобы из числа σ_1 получить выводъ съ такою же вероятностію необходимо имѣть

$$\frac{m_1}{\sqrt{s_1}} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma_1}}$$

Для другихъ наблюдений точно также получимъ

$$\frac{m_2}{\sqrt{s_2}} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma_2}}; \frac{m_3}{\sqrt{s_3}} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma_3}} \text{ и пр.}$$

опредѣляя изъ этихъ равенствъ величины σ , получимъ

$$\sigma_1 = \mu^2 \frac{s_1}{m_1^2}; \sigma_2 = \mu^2 \frac{s_2}{m_2^2}; \sigma_3 = \mu^2 \frac{s_3}{m_3^2} \text{ и т. д.}$$

и слѣдовательно

$$p_1 : p_2 : p_3 : \dots = \dots = \frac{s_1}{m_1^2} : \frac{s_2}{m_2^2} : \frac{s_3}{m_3^2} : \dots$$

т. е. вѣсы пропорциональны числамъ наблюдений и обратно пропорциональны квадратамъ ихъ средних погрѣшностей.

Такимъ образомъ наилучшійшее опредѣленіе неизвѣстной x изъ уравнений

$$x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$$

полученныхъ поочередно непосредственныхъ наблюдений, которыхъ относительныя достоинства выражены вѣсами p_1, p_2, \dots, p_n , будетъ

$$\xi_1 = \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i}$$

Чтобы этотъ средній выводъ давалъ точную величину неизвѣстной необходимо

$$\sum p_i \varepsilon_i = 0$$

и такое предположеніе по ходу приведеннаго доказательства имѣетъ дѣйствительно вероятностъ неопредѣленно возрастающую съ числомъ наблюдений.

§ 14.

Вѣсъ p и средняя ошибка m каждаго наблюдения суть величины постоянныя для известнаго способа наблюдений. Ихъ опредѣляютъ, прилагая способъ наблюдения освобожденный отъ постоянныхъ погрѣшностей, къ измѣренію точно известной величины и повторяя такое измѣреніе очень большое число разъ. Тогда будутъ известны дѣйствительныя случайныя погрѣшности ε_i ; онѣ будутъ приблизительно удовлетворять всѣмъ свойствамъ приписываемымъ нами случайнымъ погрѣшностямъ.

Средняя ошибка получится, как мы видели, весьма приближенно, если заменим интеграл μ_x суммой $\frac{\sum \epsilon_i^2}{s}$ и мы будем иметь $m = \sqrt{\frac{\sum \epsilon_i^2}{s}}$; величина p определится из уравнения

$$p = k \frac{s}{m^2}$$

где k есть произвольный коэффициент, выбор которого позволит величину различных наблюдений выразить в простейших числах, напр. освободит их от дробей и т. п.

§ 15.

Таким образом мы распространили правило арифметической среды, доказанное для непосредственных однородных наблюдений, на случай наблюдений не одинакового достоинства; перейдем теперь к изысканию наилучшего сочетания наблюдений в том случае, когда из наблюдений определяется не сама неизвестная величина, а какая нибудь функция ее.

Положим что помощью равно хороших наблюдений найдены были величины A_1, A_2, \dots, A_s для функций $F_1(X), F_2(X), \dots, F_s(X)$ неизвестной X , так что, называя через $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s$ случайные погрешности наблюдений, мы имеем в уравнений вида

$$F_i(X) - A_i = \epsilon_i.$$

Чтобы придать этим уравнениям одинаковый и притом простейший вид, допустим, что для неизвестной X известна такая приближенная величина X_0 , что можно, положив $X = X_0 + x$, пренебрегать вторю и высшими степенями поправки x ; тогда, подставляя $X_0 + x$ вместо X в найденные из наблюдений уравнения, получим

$$F_i(X_0 + x) - A_i = F_i(X_0) + xF'_i(X_0) - A_i = \epsilon_i$$

или, полагая $F'_i(X_0) = a_i$ и $A_i - F_i(X_0) = \omega_i$,

$$a_i x - \omega_i = \epsilon_i.$$

§ 16.

Случайная погрешность наблюдения вообще не зависит от того, большую или меньшую величину определяем мы помощью этого наблюдения; так что, если бы мы вместо величины $a_i x$ при совершенно тех же случайных обстоятельствах наблюдали величину x , или всякую другую величину, то получили бы ту же случайную погрешность ϵ_i . Но, определяя x из уравнений

$$a_i x - \omega_i = \epsilon_i,$$

мы находим $\frac{\omega_i}{a_i}$ с погрешностью $\frac{\epsilon_i}{a_i}$; следовательно определение x из наблюдений, помощью которых избирается величина $a_i x$, выходит тем точнее, чем больше коэффициент a_i . Если средняя ошибка наблюдения, определяющего непосредственно величину x будет m , то

ды определения x из таких же наблюдений, но приложенных къ измѣренію $a_i x$, мы должны слѣд. подовѣрять среднюю ошибку $\frac{m}{a_i}$, потому что всѣ случайныя погрѣшности будутъ въ этомъ случаѣ имѣть видъ $\frac{\epsilon}{a_i}$. Такъ какъ всѣ обратно пропорціоналенъ квадрату средней погрѣшности, то изъ предыдущаго мы заключаемъ, что уравненію

$$x - \frac{\omega_i}{a_i} = \frac{\epsilon_i}{a_i}$$

должно приписать всѣ a_i^2 , т. е. для наивыгоднѣйшаго опредѣленія x изъ такихъ уравненій должно удовлетворять условію

$$\sum a_i^2 \frac{\epsilon_i}{a_i} = 0 \text{ или } \sum a_i \epsilon_i = 0,$$

откуда, замѣнивъ ϵ_i на величину $a_i x - \omega_i$, получаемъ

$$\xi_1 \sum a_i^2 - \sum a_i \omega_i = 0$$

и наивыгоднѣйшая величина x будетъ

$$\xi_1 = \frac{\sum a_i \omega_i}{\sum a_i^2}.$$

Всѣ этого среднего вывода, равный суммѣ всѣхъ отдѣльныхъ уравненій, будетъ $\sum a_i^2$.

Полагая всѣ a_i равными единицѣ, мы возвращаемся къ простому арифметическому выводу

$$\xi_1 = \frac{\sum \omega_i}{s}.$$

Если всѣ a_i равны одной и той же величинѣ k , то получится выводъ

$$\xi_1 = \frac{\sum \omega_i}{ks}$$

и будетъ очевидно означать арифметическую средю непосредственныхъ измѣреній величины kx т. е.

$$k\xi_1 = \frac{\sum \omega_i}{s}.$$

Когда наблюденія опредѣляющія функціи $a_i x - \omega_i$ не одинаковаго достоинства, то называя ихъ всѣхъ черезъ p_i получимъ для наивыгоднѣйшаго результата

$$\xi_1 = \frac{\sum p_i a_i \omega_i}{\sum p_i a_i^2}.$$

Легко видѣть, что уравненіе

$$\sum a_i \epsilon_i = 0$$

выражаетъ условіе наименьшей величины суммы квадратовъ погрѣшностей; возьмемъ производную отъ ϵ_i изъ уравненія $\epsilon_i = a_i x - \omega_i$; будемъ имѣть:

$$a_i = \frac{d\epsilon_i}{dx}$$

и следовательно

$$\Sigma a_i \varepsilon_i = \Sigma \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx} = 0;$$

так как это есть производная от $\frac{1}{2} \Sigma \varepsilon_i^2$ и притом вторая производная этой функции равна положительной величине Σa_i^2 , то уравнение $\Sigma a_i \varepsilon_i = 0$ есть условие наименьшей величины суммы квадратов $\Sigma \varepsilon_i^2$; от этого свойства наилучшего результата взято для сочетания наблюдений название *способа наименьших квадратов*.

§ 17.

Условие наименьшей величины суммы квадратов погрешностей приводят также к наилучшим определениям неизвестных и в том случае, когда наблюдения дают величины функций многих неизвестных. Если подобно преждему дадим функциям линейный вид и через x_1, x_2, x_3, \dots означим поправки неизвестных, то все уравнения, полученные из наблюдений будут иметь вид

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + a_{i,3} x_3 + \dots - \omega_i = \varepsilon_i,$$

где в коэффициенты $a_{i,k}$ первый указатель относится к порядку наблюдений или уравнений, а второй к порядку неизвестных. На основании предыдущего, величина x_1 , каковы бы ни были прочие неизвестные x_2, x_3, \dots определяется самым выгодным образом под условием

$$\Sigma a_{i,1} \varepsilon_i = 0;$$

так как тоже самое мы должны сказать и о x_2 и о x_3 и пр., то для наилучшего определения неизвестных должно в одно время удовлетворить уравнениям:

$$\Sigma a_{i,1} \varepsilon_i = 0; \Sigma a_{i,2} \varepsilon_i = 0; \Sigma a_{i,3} \varepsilon_i = 0 \text{ и т. д.}$$

число таких уравнений равно числу неизвестных и потому совершенно достаточно для их определения. Коэффициенты $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, \dots$ суть частные производные ε_i относительно соответствующих неизвестных x_1, x_2, x_3, \dots , след. предыдущия уравнения обращаются в

$$\Sigma \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0; \Sigma \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0, \Sigma \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_3} = 0 \text{ и т. д.}$$

и все вместе выразят условие наименьшей величины суммы квадратов погрешностей $\Sigma \varepsilon_i^2$. В случае наблюдений разнородных, всем которым суть p_i эти уравнения обратятся в уравнения вида

$$\Sigma p_i \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_k} = 0$$

и выразят вместе условие наименьшей величины функции $\Sigma p_i \varepsilon_i^2$.

Мы сдѣлали здѣсь эти краткія, предварительныя замѣчанія о способѣ наименьшихъ квадратовъ для того, чтобы показать тѣсную связь этого способа съ правиломъ арифметической среды. Хоть ужъ заключеній, помощью котораго мы уяснили эту связь, можетъ служить элементарнымъ доказательствомъ способа наименьшихъ квадратовъ.

ГЛАВА II.

Исторически замечания. — Правило Лейбнера. — Частная теория Гаусса. — Определение меры точности наблюдений. — Высшие выводы. — Общая теория Гаусса. — Лапласово доказательство способа наименьших квадратов.

§ 18.

Необходимость общего способа для изыскания наилучших результатов высказывается ясно, когда из наблюдений для исчисления поправок x_1, x_2, \dots, x_n неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n получаются уравнения вида

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n - \omega_i = 0$$

и когда число i этих уравнений, обыкновенно очень большое, превосходит число неизвестных. Эти уравнения неспособны удовлетворяться в точности никакими величинами x_1, x_2, \dots, x_n , потому что количества ω_i , входящая в них, выведены из наблюдений и потому подвержены necessarily погрешностям. При составлении n уравнений необходимых для определения n неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n должно очевидно пользоваться всеми уравнениями, полученными из наблюдений, потому что мы не имеем причины предпочитать одни из них перед другими и потому что, принимая в расчет большее число данных, мы можем надеяться получить более точные результаты. Вопрос состоит в том, какой способ составления будет самый выгодный? Не зная совершенно истинных величин неизвестных мы должны очевидно признать самым выгодным такое сочетание данных уравнений, при котором вероятная погрешность неизвестных имѣют по возможности малую величину.

§ 19.

До начала нынешняго столѣтія не существовало общего способа для определения неизвестных из многочисленных уравнений, получаемых помощью наблюдений. Между различными частными приемами, употреблявшимися в прежнее время швейцаріе других *méthode de situations* и правило Котсеа.

По первому изъ этихъ способовъ наилучшимъ считались такія величины неизвестныхъ, подстановка которыхъ въ данныя уравненія вида

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,n} x_n - \omega_i = 0.$$

обращая вторыя части этихъ уравнений въ нѣкоторыя количества ϵ_i , давала бы для наибольшей изъ ϵ_i величину, меньшую нежели подстановка всякихъ другихъ величинъ; но для изы-

сканія неизвестныхъ, удовлетворяющихъ такому условию, не было никакого общаго правила. Лапласъ, послѣдуя этому способу, замѣчаетъ, что результаты его должны быть всегда очень близки къ результатамъ способа наименьшихъ квадратовъ и что слѣдовательно послѣдній способъ выгодно упреждать и въ этомъ отношеніи.

Котесъ первый обратилъ вниманіе на то, что въ составъ результата должны входить всѣ наблюденія, пропорціонально ихъ вліянію. Правило Котеса относится къ опредѣленію только одной неизвестной. Если назовемъ черезъ Δx погрѣшность вывода, взятаго изъ отдѣльнаго наблюденія

$$a_i x - \omega_i = 0,$$

то погрѣшность наблюденія ϵ_i будетъ имѣть величину $a_i \Delta x$; изъ этого видно, что поправка Δx будетъ при известной погрѣшности тѣмъ меньше, чѣмъ больше коэффициентъ a_i , и Котесъ принимаетъ a_i за мѣру вліянія наблюденія i на величину x . Выражая различныя величины

$$x_i = \frac{\omega_i}{a_i}$$

длинами отложенными по одной прямой линіи отъ общаго начала и поизжая въ концѣ каждой длины вѣсъ, пропорціональный соответствующему коэффициенту a_i , наиблагоуднѣйшее опредѣленіе x , по правилу Котеса, будетъ разстояніе центра тяжести этой системы вѣсовъ отъ общаго начала т. е. будетъ

$$\xi = \frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i} = \frac{\sum \omega_i}{\sum a_i}$$

Легко видѣть, что этотъ средний выводъ есть просто арифметическая среда уравненій $a_i x - \omega_i = \epsilon_i$, предпологая, что они имѣютъ одинаковый вѣсъ; въ самомъ дѣлѣ тогда $\sum \epsilon_i = 0$ и мы имѣемъ

$$x \sum a_i = \sum \omega_i \text{ или } x = \frac{\sum \omega_i}{\sum a_i}$$

Правило Котеса очень просто и приводитъ къ довольно точнымъ результатамъ: имъ пользовались Эйлеръ и Tobiasъ Майеръ, известный своими таблицами луны, замѣчательными по точности для того времени; важное неудобство этого правила состоитъ въ томъ, что оно вовсе не приложимо къ сочетанію уравненій, содержащихъ болѣе одной неизвестной.

§ 20.

Въ 1806 году Лежандръ въ своемъ сочиненіи «*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*» предложилъ для сочетанія уравненій способъ наименьшихъ квадратовъ. Удовлетворяя условіямъ наименьшей величины $\sum \epsilon_i^2$, должно опредѣлить неизвестныя изъ уравненій

$$\sum \epsilon_i \frac{d\epsilon_i}{dx_1} = 0; \sum \epsilon_i \frac{d\epsilon_i}{dx_2} = 0 \dots \sum \epsilon_i \frac{d\epsilon_i}{dx_n} = 0.$$

число которыхъ всегда равно числу неизвѣстныхъ. Составленіе такихъ выводныхъ уравненій очень просто: подставляя вмѣсто ϵ_i ея величину $\frac{\omega_i}{a_i}$, мы видимъ что для состав-

ления первого уравнения $\sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_i} = 0$ нужно всё левыя уравнения, помноженные каждое на свой коэффициент при x_i сложить и сумму приравнять нулю; тогда получится:

$$x_1 \sum a_{i,1}^2 + x_2 \sum a_{i,1} \cdot a_{i,2} + \dots + x_n \sum a_{i,1} \cdot a_{i,n} - \sum a_{i,1} \omega_i = 0$$

Совершенно такъ же образомъ прочія уравнения $\sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} \dots \sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_n}$ обратятся въ

$$x_1 \sum a_{i,2} \cdot a_{i,1} + x_2 \sum a_{i,2}^2 + \dots + x_n \sum a_{i,2} \cdot a_{i,n} - \sum a_{i,2} \omega_i = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1 \sum a_{i,n} \cdot a_{i,1} + x_2 \sum a_{i,n} \cdot a_{i,2} + \dots + x_n \sum a_{i,n}^2 - \sum a_{i,n} \omega_i = 0$$

Лежандр не далъ собственно доказательства, что величины x_1, x_2, \dots, x_n опредѣлены изъ такихъ уравненій благонадежно другия; онъ показалъ только, что въ случаѣ одной неизвѣстной и коэффициентовъ $a_{i,1}$ равныхъ единицамъ этотъ способъ приводитъ къ общеупотребительному правилу арифметической среды; способъ наименьшихъ квадратовъ былъ предложенъ имъ главнымъ образомъ, какъ очень простое и вѣстѣ съ тѣмъ совершенно общее средство устранить неопредѣленность въ рѣшеніи уравненій, получаемыхъ изъ наблюдений.

§ 21.

Между тѣмъ Гауссъ, независимо отъ Лежандра, еще съ 1795 года употреблялъ въ своихъ вычисленіяхъ тотъ же самый способъ и сообщалъ объ немъ извѣстно нѣкоторымъ ученымъ. Въ 1809 году вышло въ свѣтъ его знаменитое сочиненіе «*Theoria motus corporum coelestium*»; въ немъ Гауссъ помѣстилъ первое доказательство способа наименьшихъ квадратовъ и предложилъ способы для исчисления не только наибыводнѣйшихъ результатовъ, но и относительной благонадежности ихъ. Изящное доказательство Гаусса, основанное на допущеніи правила арифметической среды, важно особенно потому, что въ немъ въ первый разъ вопросъ о наблюденіяхъ внесенъ въ область Теоріи Вѣроятностей.

Назовемъ по прежнему черезъ ε_i случайныя погрѣшности наблюдений и черезъ $\varphi_i \varepsilon_i$ ихъ относительныя вѣроятности, законъ которыхъ мы предположимъ различнымъ для различныхъ способовъ наблюдений. Вѣроятность при z наблюденіяхъ получить извѣстную систему погрѣшностей выразится произведеніемъ $\varphi_1 \varepsilon_1 \cdot \varphi_2 \varepsilon_2 \dots \varphi_i \varepsilon_i \dots \varphi_n \varepsilon_n$. Не зная дѣйствительныхъ погрѣшностей, мы должны считать самыми вѣроятными такіа величины неизвѣстныхъ, которыя соответствуютъ самымъ вѣроятнымъ величинамъ ε_i , т. е. опредѣлить ихъ подъ условіемъ, что $\varphi_1 \varepsilon_1 \cdot \varphi_2 \varepsilon_2 \dots \varphi_n \varepsilon_n$ имѣетъ наибольшую величину. Возьмемъ производныя отъ логарифма этого произведенія относительно неизвѣстныхъ величинъ x_1, x_2, \dots, x_n , тогда условіе наибольшей величины выразится уравненіями

$$\sum \frac{\varphi_i' \varepsilon_i}{\varphi_i \varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dx_i} = 0; \quad \sum \frac{\varphi_i' \varepsilon_i}{\varphi_i \varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0 \dots \sum \frac{\varphi_i' \varepsilon_i}{\varphi_i \varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = 0,$$

которыя и должны служить для опредѣленія наибыводнѣйшихъ величинъ x_1, x_2, \dots, x_n ; но для этого нужно знать вѣдь функціи $\varphi_i \varepsilon_i$. Гауссъ опредѣляетъ его, допуская бездоказательно для непосредственныхъ одного рода наблюдений одной неизвѣстной уравненіе $\sum \varepsilon_i = 0$, т. е.

правило арифметической среды. Рассматривая одну неизвестную x_i и коэффициент при ней равным единице, мы имеем $\frac{dx_i}{dx_i} = 1; \frac{dx_i}{dx_{2i}} = 0 \dots \frac{dx_i}{dx_n} = 0$ и кроме того для однородных наблюдений $\varphi_i, \varepsilon = \varphi_1 \varepsilon = \dots = \varphi_s \varepsilon$; изъ всѣхъ уравнений остается въ такомъ случаѣ одно

$$\sum \frac{\varphi'_i \varepsilon_i}{\varphi \varepsilon_i} = 0$$

которое должно быть удовлетворено въ одно время съ уравненіемъ

$$\sum \varepsilon_i = 0$$

Соединяя оба эти уравненія въ одно, мы имеемъ

$$\sum \left(\frac{\varphi'_i \varepsilon_i}{\varphi \varepsilon_i} + \lambda \varepsilon_i \right) = 0,$$

гдѣ λ есть произвольный коэффициентъ. Это уравненіе должно оставаться справедливымъ каково бы ни было число наблюдений, т. е. оно не должно изменяться если къ суммѣ прибавимъ, или отнимемъ отъ нея нѣсколько подобныхъ же членовъ; слѣд. необходимо имѣемъ вообще для всякаго i

$$\frac{\varphi'_i \varepsilon_i}{\varphi \varepsilon_i} + \lambda \varepsilon_i = 0,$$

или просто

$$\frac{\varphi'_i \varepsilon}{\varphi \varepsilon} + \lambda \varepsilon = 0.$$

Умножая на $d\varepsilon$ и взявъ интегралъ, получаемъ

$$lg \varphi \varepsilon + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 = lg C$$

или

$$\varphi \varepsilon = C. e^{-\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2};$$

таковъ видъ относительной вѣроятности погрѣшности ε ; вѣроятность, что погрѣшность заключается между предѣлами $\pm \delta$ есть

$$p = \int_{-\delta}^{+\delta} \varphi \varepsilon d\varepsilon = C \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon$$

По свойству случайныхъ погрѣшностей функція $\varphi \varepsilon$ должна уменьшаться съ возрастаніемъ ε и потому коэффициентъ $-\frac{\lambda}{2}$ долженъ быть существенно отрицательный; полагая $\frac{\lambda}{2} = h^2$ имѣемъ

$$\varphi \varepsilon = C \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon d\varepsilon = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$$

Для определения постоянной C имеем

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 1;$$

вставив сюда $h \varepsilon = t$, получим

$$\frac{C}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{C \sqrt{\pi}}{h} = 1,$$

откуда

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

и следовательно

$$\varphi \varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}; \quad p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon.$$

Определенный таким образом вид функции, выражающей вероятность случайной погрешности, не удовлетворяет строго тем условиям, которые следуют из свойства таких погрешностей: именно $\varphi \varepsilon$ не обращается в нуль ни при каких конечных величинах ε и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

обращается в единицу только при бесконечно больших пределах; но свойство найденной функции чрезвычайно быстро убывать с возрастанием ε позволяет, начиная с известной величины a , зависящей от h , пренебрегать чрезвычайно малую величину

$$\int_a^{\infty} \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

как мы уже заметили об этом выше. Такое распространение предполож возможных погрешностей имеет даже некоторое основание, потому что, собственно говоря, действительные пределы означаются всегда не с полною достоверностью, а только с весьма большою вероятностью.

Интегралъ

$$p' = \int_{-\delta}^{+\delta} \varphi \epsilon dz = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} dz = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta} e^{-h^2 z^2} dz$$

означаетъ вѣроятность, что погрѣшность z не превосходитъ въ числовой величинѣ предѣла δ ; подставивъ въ немъ $h z = t$, получимъ

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta h} e^{-t^2} dt$$

слѣд. такое предположеніе имѣть весьма большую вѣроятность, если δh достаточно велико; для предѣловъ возможныхъ погрѣшностей эта вѣроятность должна быть такъ велика, чтобы ее можно было считать достоверностию. Такъ какъ въ выраженіи вѣроятности p входитъ только одинъ неопредѣленный коэффициентъ h , то только онъ и можетъ означать различіе въ точности наблюдений. Если представимъ себѣ, что h' есть коэффициентъ для другого рода наблюдений и δ' соответствующая величина предѣла интеграла

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta'}^{+\delta'} e^{-h'^2 z'^2} dz',$$

то для полученія одинаковой вѣроятности p мы должны имѣть $\delta h = \delta' h'$ или $h : h' = \delta' : \delta$; слѣд. чѣмъ болѣе h , тѣмъ меньшую погрѣшность можемъ мы ожидать отъ способа наблюдений при одинаковой вѣроятности: Гауссъ называлъ этотъ коэффициентъ *мѣрою точности наблюдений*. — Когда вѣроятность равна половинѣ, предѣлъ δ обращается въ вѣроятную погрѣшность r и мы имѣемъ $r h = 0,47694$; т. е. мѣра точности обратно пропорциональна вѣроятной погрѣшности. Всѣхъ есть очевидно количество прямо пропорциональное квадрату h . Соотношеніе между мѣрою точности и среднею ошибкою m получимъ, вычисляя m изъ уравненія

$$m^2 = \mu_2 = 2 \int_0^{\infty} \epsilon^2 \varphi \epsilon dz = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \epsilon^2 e^{-h^2 \epsilon^2} dz.$$

Положивъ $h z = t$, имѣемъ (§ 5)

$$m^2 = \frac{2}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2 h^2}$$

откуда $h m = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70711$

Опредѣливъ такимъ образомъ видъ функций $\varphi_i \epsilon_i$, возвратимся къ наивыгодивѣйшимъ результатамъ. Назовемъ черезъ h_1, h_2, \dots, h_n мѣры точности наблюдений и подставимъ

$$\varphi_i \varepsilon_i = \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i \text{ въ уравненіи вида } \sum \frac{\varphi_i \varepsilon_i}{\varphi_i \varepsilon_i} \frac{d\varepsilon_i}{dx_i} = 0; \text{ получимъ}$$

$$\sum h_i^2 \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_i} = 0; \sum h_i^2 \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0 \dots \sum h_i^2 \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = 0$$

т. е. условія наименьшей величины $\Sigma (h_i \varepsilon_i)^2$; это можно видѣть прямо изъ выраженія сложной вероятности, которая въ этомъ случаѣ обратится въ

$$\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-\Sigma (h_i \varepsilon_i)^2}$$

и будетъ очевидно наибольшая при наименьшей величинѣ $\Sigma (h_i \varepsilon_i)^2$. Если всѣ h равны, то получимъ, какъ въ правилѣ Лежандра, уравненія

$$\sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = 0; \sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = 0 \dots \sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = 0$$

Условіе наименьшей величины $\Sigma (h_i \varepsilon_i)^2$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ условіе наибыгоднѣйшаго опредѣленія неизвѣстныхъ изъ такихъ уравненій равнаго достоинства, случайныхъ погрѣбности которыхъ суть $h_i \varepsilon_i$; слѣдовательно помноженіе каждой погрѣбности на соответствующую мѣру точности приводитъ всѣ наблюденія къ одинаковой мѣрѣ точности.

Опредѣляя производныя $\frac{d\varepsilon_i}{dx_1}, \frac{d\varepsilon_i}{dx_2}, \dots, \frac{d\varepsilon_i}{dx_n}$ изъ данныхъ уравненій выйдемъ

$$\frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = a_{i,1}; \frac{d\varepsilon_i}{dx_2} = a_{i,2} \dots \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = a_{i,n}$$

и выводныя уравненія будутъ:

$$x_1 \sum h_i^2 a_{i,1}^2 + x_2 \sum h_i^2 a_{i,1} a_{i,2} + \dots + x_n \sum h_i^2 a_{i,1} a_{i,n} - \sum h_i^2 a_{i,1} \omega_i = 0$$

$$x_1 \sum h_i^2 a_{i,2} a_{i,1} + x_2 \sum h_i^2 a_{i,2}^2 + \dots + x_n \sum h_i^2 a_{i,2} a_{i,n} - \sum h_i^2 a_{i,2} \omega_i = 0$$

$$x_1 \sum h_i^2 a_{i,n} a_{i,1} + x_2 \sum h_i^2 a_{i,n} a_{i,2} + \dots + x_n \sum h_i^2 a_{i,n}^2 - \sum h_i^2 a_{i,n} \omega_i = 0$$

здѣсь можно ввести вмѣсто квадратовъ мѣры точности пропорціональные имъ вѣсы.

§ 22.

Доказательство Гаусса, какъ мы видѣли, основывается на томъ, что, допуская правило арифметической среды для всякаго числа непосредственныхъ измѣреній, мы необходимо должны допустить извѣстный законъ вероятности случайныхъ погрѣбностей и правило наименьшихъ квадратовъ обращается въ прямое слѣдствіе этого закона. Самое правило арифметической среды Гауссъ допускаетъ безъ всякаго доказательства, какъ общепринятое и подтверж-

денное востояннымъ согласіемъ съ опытами. Предыдущее изложеніе теоріи ариметической среды, основанное на анализѣ Лапласа, можетъ теперь указать намъ, какой степени довѣрія заслуживаетъ этотъ частный законъ вѣроятности случайныхъ погрѣшностей: онъ очевидно можетъ быть допускаемъ съ достаточнымъ приближеніемъ только при очень большомъ числѣ наблюдений; видъ $\varphi \varepsilon$, найденный нами выше, выражаетъ главнымъ образомъ только быстрое уменьшеніе вѣроятности съ приближеніемъ къ предѣламъ погрѣшностей, которые приводятся въ согласіе съ наблюдениями приличнымъ выборомъ коэффициента h .

§ 23.

Мы говорили выше, что результатъ непосредственныхъ наблюдений могъ бы быть извлеченъ не только изъ условія $\sum \varepsilon_i = 0$, но вообще изъ $\sum \varepsilon_i^{2n-1} = 0$. если бы такое опредѣленіе не приводило къ чрезвычайно сложнымъ исчислениямъ. Изъ условія $\sum \varepsilon_i^{2n-1} = 0$ можно вывести для изысканія наивыгоднѣйшихъ результатовъ правила, аналогичныя съ способомъ наименьшихъ квадратовъ точно также, какъ Гауссъ вывелъ этотъ способъ изъ правила ариметической среды. Въ самомъ дѣлѣ, допуская весьма вѣроятное уравненіе:

$$\sum \varepsilon_i^{2n-1} = 0$$

и соединяя его съ условіемъ наивыгоднѣйшаго опредѣленія одной неизвѣстной изъ непосредственныхъ наблюдений

$$\sum \frac{\varphi' \varepsilon_i}{\varphi \varepsilon_i} = 0,$$

мы получимъ подобно прежнему уравненіе

$$\sum \left[\frac{\varphi' \varepsilon_i}{\varphi \varepsilon_i} + \lambda \varepsilon_i^{2n-1} \right] = 0,$$

которое, распадаясь необходимо на отдѣльные члены, даетъ для опредѣленія вида функціи $\varphi \varepsilon$ дифференціальное уравненіе

$$\frac{\varphi' \varepsilon}{\varphi \varepsilon} + \lambda \varepsilon^{2n-1} = 0,$$

откуда

$$\varphi \varepsilon = C e^{-\frac{\lambda}{2n} \varepsilon^{2n}},$$

т е наивыгоднѣйшее опредѣленіе неизвѣстныхъ будетъ то, для котораго вообще $\sum \varepsilon_i^{2n}$ имѣетъ наименьшую величину; протекаящая отсюда выводныя уравненія

$$\sum \varepsilon_i^{2n-1} \frac{d\varepsilon_i}{dx_i} = 0 \dots \sum \varepsilon_i^{2n-1} \frac{d\varepsilon_i}{dx_n} = 0$$

или

$$\sum a_{i,1} \varepsilon_i^{2n-1} = 0 \dots \sum a_{i,n} \varepsilon_i^{2n-1} = 0$$

приводить очевидно къ чрезвычайно сложнымъ и въ большей части случаевъ невыполнимымъ исчисленіямъ; эти уравненія только въ способъ наименьшихъ квадратовъ остаются линейными и потому этотъ способъ есть простѣйшій изъ всѣхъ возможныхъ, что даетъ ему безусловное преимущество въ практическомъ отношеніи.

§ 24.

Мѣра точности и вероятная ошибка вычисляются какъ мы видѣли черезъ среднюю погрѣшность m , величина которой можетъ быть приближенно опредѣлена изъ наблюдений, чрезъ замѣну

интеграла $2 \int_0^{\infty} \varepsilon^k \varphi \varepsilon d\varepsilon$ суммой $\frac{\sum \varepsilon_i^k}{s}$. Возможность найти при частномъ значеніи $\varphi \varepsilon$ всѣ ин-

тегралы вида $\int_0^{\infty} \varepsilon^k \varphi \varepsilon d\varepsilon$ даетъ средство опредѣлить изъ наблюдений мѣру точности h не только посредствомъ квадратовъ погрѣшностей, но помощью какихъ бы то ни было другихъ степеней ихъ. Дѣйствительно, полагая $\varphi \varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$, находимъ вообще

$$\mu_k = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon^k \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^k \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (h\varepsilon)^k e^{-(h\varepsilon)^2} d(h\varepsilon) = \frac{\Gamma \frac{k}{2} (k+1)}{h^k \sqrt{\pi}}$$

и слѣдовательно

$$h = \sqrt{\frac{\Gamma \frac{k}{2} (k+1)}{\mu_k \sqrt{\pi}}}$$

При большомъ числѣ s наблюдений можно замѣнить μ_k вероятнѣйшею величиною $\frac{\sum \varepsilon_i^k}{s}$ и сѣ принять

$$h = \sqrt{\frac{k \Gamma \frac{k}{2} (k+1)}{\sum \varepsilon_i^k \sqrt{\pi}}}$$

при нечетномъ $k = 2m - 1$ это выраженіе будетъ

$$h = \sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot s}{\sum \varepsilon_i^{2m-1} \sqrt{\pi}}}$$

а при четномъ $k = 2m$

$$h = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{s}{\sum \varepsilon_i^{2m}}}$$

Такимъ образомъ получается для h безконечно большое число выраженій, которыя всѣ давали бы одинаковую величину, если бы въ вычисленіе ихъ не входило приближенныхъ

средних величин $\frac{\sum \varepsilon_i^2}{s}$; въ действительности величины h будутъ болѣе или менѣе различны между собою и самъ собою возникаетъ вопросъ, какое опредѣленіе h должно считать самымъ выгоднымъ. Рѣшенію этого вопроса посвящена статья Гаусса: «*Memoire sur la détermination de la précision des observations*» въ *Zeitschrift für Astronomie und Verwandte Wissenschaften*. Исслѣдованіе этого вопроса, какъ мы сейчасъ увидимъ, приводитъ къ тому заключенію, что самое выгодное опредѣленіе h получается именно помощью средней ошибки m ; мы видѣли кромѣ того, что отъ этой же величины m зависитъ степень благонадежности арифметической среды, а слѣд. и протекающаго изъ правила арифметической среды способа наименьшихъ квадратовъ: поэтому то Гауссъ приписалъ особенную важность средней ошибкѣ въ сравненіи

съ другими средними выводами вида $\sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{s}}$.

Сложная относительная вѣроятность системы погрѣшностей равно хорошихъ наблюдений выражается функцией

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^s e^{-h^2 \sum \varepsilon_i^2};$$

когда въ этомъ выраженіи извѣстна сумма $\sum \varepsilon_i^2$ и неизвѣстна мѣра точности h , то подставляя вмѣсто h различныя величины будемъ получать различныя величины и для сложной вѣроятности извѣстныхъ погрѣшностей и эта вѣроятность будетъ очевидно наибольшою, если h дана будетъ самая вѣроятная величина. Такимъ образомъ самое выгодное выраженіе h получится изъ уравненія:

$$\frac{d}{dh} \left(h^s e^{-h^2 \sum \varepsilon_i^2} \right) = 0,$$

или

$$h^{s-1} e^{-h^2 \sum \varepsilon_i^2} \left(s - 2 h^2 \sum \varepsilon_i^2 \right) = 0;$$

такъ какъ h вообще не равно ни нулю, ни безконечности, то нибѣтъ просто, называя опредѣленную такимъ образомъ наилучшійшую величину h черезъ H ,

$$s - 2 H^2 \sum \varepsilon_i^2 = 0,$$

откуда

$$H = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2 \sum \varepsilon_i^2}}$$

При большомъ числѣ наблюдений можно положить $\sum \varepsilon_i^2 = s \mu_2$; слѣд. мы получимъ какъ и прежде:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}} = \frac{1}{m\sqrt{2}}.$$

г. е. наивыгоднѣйшее опредѣленіе мѣры точности получается съ помощью суммы квадратовъ погрѣшностей или съ помощью средней ошибки. Функция $\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^s e^{-h^2 \sum \varepsilon_i^2}$, которая при h переменномъ представляетъ относительную вѣроятность предположенія, сдѣланнаго о величинѣ h , получаетъ при $h = H$ наибольшую величину:

$$\left(\frac{H}{\sqrt{\pi}}\right)^s e^{-\frac{s}{2}}$$

§ 25.

Мѣра точности и слѣд вѣроятная ошибка могутъ быть вычислены помощью различныхъ степеней погрѣшностей: постараемся опредѣлить вѣроятные предѣлы погрѣшностей этихъ различныхъ опредѣленій; при этомъ мы можемъ замѣтить очевидное преимущество вычислять h помощью квадратовъ погрѣшностей. Мы нашли въ первой главѣ (§ 11), что вѣроятные предѣлы суммы n -ыхъ степеней погрѣшностей, взятыхъ съ положительнымъ знакомъ, суть

$$\sum \varepsilon_i^n - \mu_n \left[1 \pm 0,47694 \sqrt{\frac{2}{s} \left(\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} - 1 \right)} \right],$$

приложимъ теперь этотъ результатъ, относящійся ко всякому закону вѣроятности погрѣшностей, къ частному значенію $\varphi \varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$; тогда $\mu_n = \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)}{h^n \sqrt{\pi}}$ и вѣроятные предѣлы

истинной величины $\sum \varepsilon_i^n$ будутъ

$$\sum \varepsilon_i^n = \frac{s \Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)}{h^n \sqrt{\pi}} \left[1 \pm 0,47694 \sqrt{\frac{2}{s} \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(n+\frac{1}{2})}{[\Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)]^2} - 1 \right)} \right]$$

Отсюда найдемъ предѣлы для мѣры точности h , когда въ ея вычисленіи интегралъ μ_n замѣнимъ суммою $\sum \varepsilon_i^n$; именно

$$h = \left\{ \frac{s \Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)}{\sum \varepsilon_i^n \sqrt{\pi}} \left[1 \pm 0,47694 \sqrt{\frac{2}{s} \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(n+\frac{1}{2})}{[\Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)]^2} - 1 \right)} \right] \right\}^{\frac{1}{n}}$$

Разлагая множителъ при $\sqrt{\frac{s \Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)}{\sqrt{\pi} \cdot \sum \varepsilon_i^n}}$ въ рядъ и довольствуясь первою степеню, г. е.

пренебрегая членами дѣлѣнными на s , получимъ

$$h = \sqrt{\frac{s \Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)}{\sqrt{\pi} \cdot \sum \varepsilon_i^2}} \left[1 \pm \frac{0,47694}{n} \sqrt{\frac{2}{s} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+\frac{1}{2})}{[\Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)]^2} - 1 \right)} \right].$$

Вычисляя въ этой формулѣ величины $\frac{0,47694}{n} \sqrt{\frac{2}{s} \left[\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}) \cdot \sqrt{\pi}}{[\Gamma_{\frac{1}{2}}(n+1)]^2} - 1 \right]}$ = α_n для различныхъ n найдемъ:

$$\alpha_1 = \frac{0,50958}{\sqrt{s}}; \alpha_2 = \frac{0,47694}{\sqrt{s}}; \alpha_3 = \frac{0,49720}{\sqrt{s}}; \alpha_4 = \frac{0,55072}{\sqrt{s}};$$

$$\alpha_5 = \frac{0,63551}{\sqrt{s}}; \alpha_6 = \frac{0,75578}{\sqrt{s}} \text{ и т. д.}$$

отсюда видно, что наименьшая изъ величинъ α_n есть α_2 т. е. предѣлы выходятъ наиболѣе тѣсные при опредѣленіи мѣры точности изъ квадратовъ погрѣшностей. Чтобы судить объ относительной выгодѣ употребленія различныхъ α_n , рассмотримъ отношенія чиселъ наблюдений, необходимыхъ для достиженія одинаковой благонадежности въ опредѣленіи h помощью различныхъ степеней погрѣшностей; назовемъ черезъ s_1, s_2, \dots, s_n числа наблюдений при которыхъ всѣ α_n выходятъ одинаковы, получимъ очевидно

$$s_1 : s_2 : s_3 : \text{ и т. д.} = (0,50958)^2 : (0,47694)^2 : (0,49720)^2 : \text{ и т. д.}$$

или, приведя всѣ числа къ $s_2 = 100$

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : s_5 : s_6 : \dots = 114 : 100 : 109 : 133 : 178 : 251 : \dots$$

т. е. для одинаково благонадежнаго вывода мѣры точности изъ различныхъ степеней погрѣшностей нужно принимать въ расчетъ по 100 наблюдений, служащихъ къ опредѣленію изъ квадратовъ погрѣшностей, 114 наблюдений для опредѣленія изъ первыхъ степеней, 109 изъ третьихъ и т. д. При очень большомъ числѣ наблюдений вычисленія суммы погрѣшностей гораздо проще нежели суммы квадратовъ и потому для сокращенія исчисленій можно весьма удовлетворительно опредѣлять мѣру точности изъ первыхъ степеней, если сумма квадратовъ не нужна для другихъ цѣлей

§ 26.

Рассмотримъ теперь, какъ при частномъ значеніи закона вѣроятности погрѣшностей, опредѣляются всѣ результаты полученные по способу наименьшихъ квадратовъ. Вопросъ этотъ имѣетъ чрезвычайную большую важность, потому что отъ него зависитъ опредѣленіе вѣроятныхъ предѣловъ погрѣшности каждаго результата и слѣдъ степень довѣрія къ нему

Начнемъ съ простѣйшаго случая, когда уравненія содержатъ только одну неизвѣстную, т. е. имѣютъ видъ

$$a_i x - \omega_i = \varepsilon_i.$$

Навыгоднѣйшее опредѣленіе x получается изъ условія наименьшей величины $\sum \varepsilon_i^2$ и, называя величину x , опредѣленную подъ этимъ условіемъ, черезъ ξ , мы найдемъ

$$\xi = \frac{\sum a_i \omega_i}{\sum a_i^2}$$

Результат этот относится къ случаю разнородныхъ наблюдений, если уравненія помножены соответственно на свои вѣры точности и такимъ образомъ приведены къ общей вѣрѣ точности. Предположенію $x = \xi$ соответствуетъ наибольшая величина сложной вѣроятности $K e^{-h^2 \sum E_i^2}$, потому что погрѣшности E_1, E_2, \dots, E_p , вычисленныя въ предположеніи $x = \xi$ удовлетворяютъ наименьшей величинѣ суммы квадратовъ $\sum e_i^2$. Всякому другому предположенію о величинѣ x соответствуетъ другая система погрѣшностей и слѣд. другая величина вѣроятности $K e^{-h^2 \sum e_i^2}$, такъ что функція $K e^{-h^2 \sum e_i^2}$ если въ ней на мѣсто e_1, e_2, \dots подставлены погрѣшности, вычисленныя въ какомъ-нибудь предположеніи о величинѣ x , представляетъ относительную вѣроятность этого предположенія. Вѣроятнѣйшая величина ξ безъ сомнѣнія будетъ отличаться отъ истинной величины x ; положимъ, что погрѣшность въ определеніи $x = \xi$ есть Δx , т. е. что истинная величина $x = \xi + \Delta x$, тогда функція

$$K e^{-h^2 \sum (a_i x - \omega_i)^2},$$

гдѣ $x = \xi + \Delta x$, будетъ означать относительную вѣроятность погрѣшности Δx въ определеніи $x = \xi$; точно также

$$K e^{-h^2 \sum [a_i (x + dx) - \omega_i]^2}$$

по причинѣ $d\Delta x = dx$, означаетъ вѣроятность погрѣшности $\Delta x + d\Delta x$ и слѣдовательно

$$K e^{-h^2 \sum [a_i x - \omega_i]^2} d\Delta x$$

будетъ вѣроятность, что истинная величина x заключается между предѣлами $\xi + \Delta x$ и $\xi + \Delta x + d\Delta x$. Если бы мы привели эту вѣроятность къ виду

$$K e^{-H^2 \Delta x^2} d\Delta x$$

то величина H была бы вѣра точности определенія $x = \xi$ и слѣд. выраженіе $\frac{H^2}{h^2}$ выразило бы относительный вѣсъ этого определенія. Показатель $-h^2 \sum [a_i x - \omega_i]^2$ легко привести къ виду $-H^2 \Delta x^2$ слѣдующимъ образомъ:

$$\sum [a_i x - \omega_i]^2 = x^2 \sum a_i^2 - 2x \sum a_i \omega_i + \sum \omega_i^2;$$

подставимъ сюда вмѣсто $\sum a_i \omega_i$ ея величину $\xi \sum a_i^2$ и приложимъ и вычтемъ членъ $\xi^2 \sum a_i^2$, тогда выйдетъ

$$\sum (a_i x - \omega_i)^2 = (x - \xi)^2 \sum a_i^2 + \sum \omega_i^2 - \xi^2 \sum a_i^2$$

т. е.

$$\sum [a_i x - \omega_i]^2 = \Delta x^2 \sum a_i^2 + C,$$

гдѣ C есть постоянная величина; относя e^C къ постоянному коэффициенту K найдемъ вѣроятность

$$K. e^{-h^2 \Sigma a_i^2 \cdot \Delta x^2} d\Delta x$$

слѣд. $H = h \cdot \sqrt{\Sigma a_i^2}$ и вѣсъ опредѣленія $x = \xi$, согласно съ тѣмъ, что мы нашли въ первой главѣ, равенъ Σa_i^2 . Постоянное K опредѣляется изъ уравненія

$$K. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Sigma a_i^2 \cdot \Delta x^2} d\Delta x = 1,$$

откуда

$$K = \frac{h \cdot \sqrt{\Sigma a_i^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Вѣроятность, что погрѣшность Δx не превосходитъ величины δ , будетъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta h \sqrt{\Sigma a_i^2}} e^{-t^2} dt ;$$

когда эта вѣроятность равна половинѣ, имѣемъ

$$r_x h \sqrt{\Sigma a_i^2} = 0,47694$$

гдѣ r_x есть вѣроятная погрѣшность величины ξ ; слѣд. съ вѣроятностію равной половинѣ можно предполагать, что величина x не выходитъ изъ предѣловъ

$$\xi \pm \frac{0,47694}{h \sqrt{\Sigma a_i^2}}$$

§ 27.

Обратимся теперь къ изысканію вѣсовъ въ случаѣ многихъ неизвѣстныхъ. Уравненія, полученныя изъ наблюдений, имѣютъ видъ:

$$\begin{aligned} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,k} x_k + \dots + a_{1,n} x_n - \omega_1 &= \varepsilon_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,k} x_k + \dots + a_{2,n} x_n - \omega_2 &= \varepsilon_2 ; \\ \dots & \\ a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,k} x_k + \dots + a_{i,n} x_n - \omega_i &= \varepsilon_i \\ \dots & \\ a_{s,1} x_1 + a_{s,2} x_2 + \dots + a_{s,k} x_k + \dots + a_{s,n} x_n - \omega_s &= \varepsilon_s \end{aligned}$$

Оставляя знаку Σ прежнее значеніе суммованія отъ 1 до s по указателю i порядка наблюдений, означимъ знакомъ S_l^n суммованіе отъ 1 до n по указателю k порядка неизвѣстныхъ; тогда предыдущимъ уравненіямъ можно дать такой видъ:

$$\begin{aligned}
 \sum_i^n a_{i,1} x_k - \omega_1 &= \varepsilon_1 \\
 \sum_i^n a_{i,2} x_k - \omega_2 &= \varepsilon_2 \\
 \dots & \\
 \sum_i^n a_{i,k} x_k - \omega_k &= \varepsilon_k \\
 \dots & \\
 \sum_i^n a_{i,n} x_k - \omega_n &= \varepsilon_n
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

Назовемъ черезъ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n$ величины неизвестныхъ, удовлетворяющія условию наименьшей величины суммы квадратовъ погрѣшностей; онѣ определяются изъ уравненій вида

$$\sum_i \xi_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_k} = 0 \text{ т. е. изъ}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_i^n \left[\xi_i \sum a_{i,j} a_{i,k} \right] - \sum a_{i,k} \omega_i &= 0 \\
 \sum_i^n \left[\xi_k \sum a_{i,j} a_{i,k} \right] - \sum a_{i,j} \omega_i &= 0 \\
 \dots & \\
 \sum_i^n \left[\xi_k \sum a_{i,n} a_{i,k} \right] - \sum a_{i,n} \omega_i &= 0
 \end{aligned}$$

и будутъ самыми выгодными величины x_1, x_2, \dots, x_n ; безъ сомнѣнiя онѣ будутъ отличаться отъ истинныхъ значенiй неизвестныхъ; такъ что, подставляя въ эти уравненiя истинныя величины x_1, x_2, \dots, x_n вмѣсто $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ вторыя части не будутъ нули; означая ихъ черезъ A_1, A_2, \dots, A_n , получимъ

$$\begin{aligned}
 \sum_i^n \left[x_k \sum a_{i,j} a_{i,k} \right] - \sum a_{i,k} \omega_i &= A_1 \\
 \sum_i^n \left[x_k \sum a_{i,j} a_{i,k} \right] - \sum a_{i,j} \omega_i &= A_2 \\
 \dots & \\
 \sum_i^n \left[x_k \sum a_{i,n} a_{i,k} \right] - \sum a_{i,n} \omega_i &= A_n
 \end{aligned}
 \tag{II}$$

Наибольшiе выгодныя величины ξ_k получатся изъ выведенныхъ отсюда выраженiй x_k , если положимъ въ нихъ $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$.

§ 28.

Опредѣлимъ x_i изъ перваго уравненiя; получимъ

$$x_i = - \frac{\sum_i^n \left[x_k \sum a_{i,j} a_{i,k} \right]}{\sum a_{i,j}^2} + \frac{\sum a_{i,j} \omega_j}{\sum a_{i,j}^2} + \frac{A_1}{\sum a_{i,j}^2}$$

вставим эту величину въ какое нибудь изъ остальныхъ ураженій, напр въ соответствующее порядку l , т. е. въ

$$S_l^n [x_k \sum a_{i,l} a_{i,k}] - \sum a_{i,l} \omega_i = A_l$$

которому можно дать видъ:

$$x_l \sum a_{i,l} a_{i,l} + S_2^n [x_k \sum a_{i,l} a_{i,k}] - \sum a_{i,l} \omega_i = A_l$$

соединя суммы распространяющіяся на одинакіе предѣлы, получимъ:

$$S_2^n [x_k (\sum a_{i,l} a_{i,k} - \frac{\sum a_{i,l} a_{i,l} \sum a_{i,l} a_{i,k}}{\sum a_{i,l}^2})] - [\sum a_{i,l} \omega_i - \frac{\sum a_{i,l} a_{i,l} \sum a_{i,l} \omega_i}{\sum a_{i,l}^2}] = A_l - \frac{A_l \sum a_{i,l} a_{i,l}}{\sum a_{i,l}^2}$$

или, означая для сокращенія коэффициенты при x_k и два другіе члена, по порядку через $\sum b_{i,l} b_{i,k}$, $\sum b_{i,l} \omega_i^{(2)}$ и B_l , получимъ

$$S_2^n [x_k \sum b_{i,l} b_{i,k}] - \sum b_{i,l} \omega_i^{(2)} = B_l$$

Отъ подстановки величины x_l определенной изъ перваго уравненія во все прочія получатся такимъ образомъ $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными x_2, x_3, \dots, x_n :

$$S_2^n [x_k \sum b_{i,2} b_{i,k}] - \sum b_{i,2} \omega_i^{(2)} = B_2$$

$$S_2^n [x_k \sum b_{i,3} b_{i,k}] - \sum b_{i,3} \omega_i^{(2)} = B_3$$

(III)

$$\dots \dots \dots$$

$$S_2^n [x_k \sum b_{i,n} b_{i,k}] - \sum b_{i,n} \omega_i^{(2)} = B_n$$

Уравненія эти по виду совершенно сходны съ уравненіями (II); изъ нихъ вѣроятнѣйшія величины $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ определятса, если положимъ $B_2 = B_3 = \dots = B_n = 0$; такъ, что коэффициенты $\sum b_{i,l} b_{i,k}$ можно разсматривать, какъ дѣйствительныя суммы, определяя приличнымъ образомъ величины b , и уравненія (III) можно считать выведенными изъ наблюдений, определяющихъ только $n-1$ неизвѣстныхъ x_2, x_3, \dots, x_n . Точно такимъ же образомъ, вставляя величину x_l определенную изъ перваго изъ уравненій (III) во все прочія и означая

$$\sum b_{i,l} b_{i,k} = \frac{\sum b_{i,2} b_{i,l} \sum b_{i,2} b_{i,k}}{\sum b_{i,2}^2} = \sum c_{i,l} c_{i,k}$$

$$\sum b_{i,l} \omega_i^{(2)} = \frac{^{(2)} \sum b_{i,2} b_{i,l} \sum b_{i,2} \omega_i^{(2)}}{\sum b_{i,2}^2} = \sum c_{i,l} \omega_i^{(2)}$$

$$B_l = \frac{B_2 \sum b_{i,2} b_{i,l}}{\sum b_{i,2}^2} = C_l$$

получимъ $n-2$ уравненій съ $n-2$ неизвѣстными x_3, x_4, \dots, x_n :

$$S_1^n [x_k \sum e_{i,1} e_{i,k}] - \sum e_{i,1} \omega_i^{(1)} = C_1$$

$$S_2^n [x_k \sum e_{i,2} e_{i,k}] - \sum e_{i,2} \omega_i^{(2)} = C_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_n^n [x_k \sum e_{i,n} e_{i,k}] - \sum e_{i,n} \omega_i^{(n)} = C_n$$

Продолжая подобным образом исключение неизвестных, дойдем наконец до уравнения, содержащего только x_n ; оно будет иметь вид

$$x_n \sum q_{i,n}^2 - \sum q_{i,n} \omega_i^{(n)} = Q_n \tag{IV}$$

сходный с видом выводного уравнения, составленного для наблюдений, содержащих одну неизвестную. Для невыгоднейшего результата, по причине $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$, ищем вообще $B_i = 0$, $C_i = 0 \dots$ и слѣд. $Q_n = 0$; такимъ образомъ невыгоднейшая величина ξ_n определяется изъ уравненія:

$$\xi_n \sum q_{i,n}^2 - \sum q_{i,n} \omega_i^{(n)} = 0$$

и будетъ

$$\xi_n = \frac{\sum q_{i,n} \omega_i^{(n)}}{\sum q_{i,n}^2} \tag{IV'}$$

§ 29.

Допуская по аналогіи, что величины $q_{i,n}$ иѣютъ значеніе коэффициентовъ при x_n въ нѣкоторыхъ уравненіяхъ вида

$$q_{i,n} x_n - \omega_i^{(n)} = 0$$

получаемыхъ изъ наблюдений для опредѣленія одной неизвѣстной x_n ; мы можемъ предвидѣть, что всѣхъ результата ξ_n есть $\sum q_{i,n}^2$. Подтверженіе этой догадки основывается на томъ, что функція

$$K e^{-h^2 \sum e_i^2}$$

или, полагая общую вѣрность h равною единицѣ и $\sum e_i^2 = M$,

$$K e^{-M}$$

пропорціональна сложной вѣроятности извѣстной системы погрѣшностей и слѣд. представляетъ относительную вѣроятность данной системы неизвѣстныхъ x_1, x_2, \dots, x_n . Чтобы опредѣлить всѣхъ вывода ξ_n представимъ функцію M въ удобномъ для этой цѣли видѣ:

$$M = \frac{A_1^2}{\sum a_{i,1}^2} + \frac{B_2^2}{\sum b_{i,2}^2} + \frac{C_3^2}{\sum c_{i,3}^2} + \dots + \frac{Q_n^2}{\sum q_{i,n}^2} + \text{Пост.}$$

Къ этому виду можно привести величину M помощью простаго разложенія суммы квадратовъ погрѣшностей; но гораздо удобѣе исполнить это по слѣдующему способу, который предложенъ Гауссомъ въ «*Theoria motus corporum coelestium*».

Изъ составленія уравненій (II) слѣдуетъ, что

$$A_1 = \sum \varepsilon_i \frac{d\varepsilon_i}{dx_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dM}{dx_1}$$

и въ A_1 входятъ всѣ неизвѣстныя x_1, x_2, \dots, x_n . Положимъ

$$M - \frac{A_1^2}{\lambda_1} = M_1$$

и опредѣлимъ величину λ_1 подѣ условіемъ, чтобы M_1 не содержало переменной x_1 ; для этого имѣемъ уравненіе

$$\frac{dM_1}{dx_1} = 0$$

т. е.

$$\frac{dM_1}{dx_1} = \frac{dM}{dx_1} - \frac{2A_1}{\lambda_1} \cdot \frac{dA_1}{dx_1} = 0$$

но $\frac{dM}{dx_1} = 2A_1$ и $\frac{dA_1}{dx_1} = \sum a_{i,1}^2$; слѣд. $\lambda_1 = \sum a_{i,1}^2$ и функція

$$M_1 = M - \frac{A_1^2}{\sum a_{i,1}^2}$$

не содержитъ x_1 . Рассмотримъ теперь $\frac{1}{2} \cdot \frac{dM_1}{dx_2}$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dM_1}{dx_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dM}{dx_2} - \frac{A_1}{\sum a_{i,1}^2} \cdot \frac{dA_1}{dx_2} = A_2 - \frac{\sum a_{i,1} a_{i,2}}{\sum a_{i,1}^2} A_1 = B_2;$$

положимъ

$$M_1 - \frac{B_2^2}{\lambda_2} = M_2$$

и опредѣлимъ λ_2 подѣ условіемъ, что M_2 не содержитъ x_2 ; т. е. что $\frac{dM_2}{dx_2} = 0$; получимъ

$$\frac{dM_2}{dx_2} = \frac{dM_1}{dx_2} - \frac{2B_2}{\lambda_2} \cdot \frac{dB_2}{dx_2} = 0,$$

но $\frac{dM_1}{dx_2} = 2B_2$; $\frac{dB_2}{dx_2} = \sum b_{i,2}^2$; слѣд. $\lambda_2 = \sum b_{i,2}^2$

и функція

$$M_2 = M - \frac{A_1^2}{\sum a_{i,1}^2} - \frac{B_2^2}{\sum b_{i,2}^2}$$

не содержитъ ни x_1 , ни x_2 . Полагая далѣе

$$M_2 = M_2 - \left(\frac{1}{2} \frac{dM_2}{dx_3} \right)^2$$

опредѣлимъ

$$\frac{1}{2} \frac{dM_2}{dx_2} = \frac{1}{2} \frac{dM_1}{dx_2} - \frac{B_2}{\Sigma b_{i,2}^2} \frac{dB_2}{dx_2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dM_1}{dx_2} = \frac{1}{2} \frac{dM}{dx_2} - \frac{A_1}{\Sigma a_{i,1}^2} \frac{dA_1}{dx_2} = A_2 - \frac{\Sigma a_{i,1} a_{i,2}}{\Sigma a_{i,1}^2} A_1 = B_2,$$

и слѣд.

$$\frac{1}{2} \frac{dM_2}{dx_2} = B_2 - \frac{\Sigma b_{i,1} b_{i,2}}{\Sigma b_{i,2}^2} B_2 = C_2,$$

т. е.

$$M_2 = M_2 - \frac{C_2^2}{\lambda_2},$$

опредѣлимъ λ_2 по условію, чтобы M_2 не содержало x_2 ; для этого имѣемъ

$$\frac{dM_2}{dx_2} = \frac{dM_2}{dx_2} - \frac{2C_2}{\lambda_2} \frac{dC_2}{dx_2} = 0,$$

но $\frac{dM_2}{dx_2} = 2C_2$ и $\frac{dC_2}{dx_2} = \Sigma c_{i,2}^2$, слѣд. $\lambda_2 = \Sigma c_{i,2}^2$ и функция

$$M_2 = M - \frac{A_1^2}{\Sigma a_{i,1}^2} - \frac{B_2^2}{\Sigma b_{i,2}^2} - \frac{C_2^2}{\Sigma c_{i,2}^2}$$

содержитъ только x_1, x_2, \dots, x_n . Продолжая точно также, найдемъ окончательно

$$M = \frac{A_1^2}{\Sigma a_{i,1}^2} + \frac{B_2^2}{\Sigma b_{i,2}^2} + \frac{C_2^2}{\Sigma c_{i,2}^2} + \dots + \frac{Q_n^2}{\Sigma q_{i,n}^2} + \text{Пост.}$$

гдѣ Q_n содержитъ только x_n . Постоянная величина независитъ отъ x_1, x_2, \dots, x_n и потому не измѣняется съ перемѣною ихъ; ея значеніе открывается, когда на мѣсто x_1, x_2, \dots, x_n поставимъ въ M ихъ вѣроятнѣйшія значенія $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, при этомъ $A_1 = B_1 = \dots = Q_n = 0$ и слѣд. постоянная величина есть наименьшая величина M ; если назовемъ черезъ E_1, E_2, \dots, E_n погрѣшности, соответствующія предположенію $x_1 = \xi_1; x_2 = \xi_2 \dots x_n = \xi_n$, то будемъ имѣть

$$M = \frac{A_1^2}{\Sigma a_{i,1}^2} + \frac{B_2^2}{\Sigma b_{i,2}^2} + \dots + \frac{Q_n^2}{\Sigma q_{i,n}^2} + \Sigma E_i^2$$

Сравнивая это выраженіе съ тѣмъ, которое получается чрезъ непосредственное разложеніе величины M , легко убѣдимся, что

$$\Sigma E_i^2 = \Sigma \omega_i^{(n)2},$$

это равенство даетъ намъ средство вычислить сумму ΣE_i^2 не дѣлая подстановки величинъ ξ_k въ начальныя уравненія.

§ 30.

Мы сказали, что функция Ke^{-M} пропорциональна вѣроятности соответствующей системы неизвѣстныхъ; точно также функция:

$$K e^{-M} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

есть вѣроятность, что неизвѣстныя заключаются между предѣлами x_1 и $x_1 + dx_1$; x_2 и $x_2 + dx_2$ и пр. Отнесем постоянную величину $e^{-\sum E_i^2}$ къ коэффициенту K , эта вѣроятность будетъ:

$$K e^{-\left[\frac{A^2}{\sum a_{i,1}^2} + \frac{B^2}{\sum b_{i,2}^2} + \dots + \frac{Q^2}{\sum q_{i,n}^2} \right]} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Возьмемъ интегралъ этого выраженія относительно x_1 между предѣлами $-\infty$ и $+\infty$; x_1 заключается только въ A , и $\frac{dA}{dx_1} = \sum a_{i,1}^2$, слѣд. интегралъ будетъ:

$$K \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sum a_{i,1}^2}} e^{-\left[\frac{B^2}{\sum b_{i,2}^2} + \frac{C^2}{\sum c_{i,3}^2} + \dots + \frac{Q^2}{\sum q_{i,n}^2} \right]} dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

онъ означаетъ вѣроятность, что величины $x_2, x_3 \dots x_n$ заключаются между предѣлами x_2 и $x_2 + dx_2$; x_3 и $x_3 + dx_3$ и т. д. между тѣмъ какъ x_1 можетъ имѣть всякую величину между $-\infty$ и $+\infty$. Интегрируя потомъ относительно x_2 и замѣчая, что x_2 заключается только въ B , и что $\frac{dB}{dx_2} = \sum b_{i,2}^2$ и т. д. получимъ наконецъ для вѣроятности, что при какихъ бы то ни было величинахъ $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$, неизвѣстная x_n заключается между предѣлами x_n и $x_n + dx_n$, выраженіе

$$K \frac{(\sqrt{\pi})^{n-1}}{\sqrt{\sum a_{i,1}^2 \cdot \sum b_{i,2}^2 \cdot \dots}} e^{-\frac{Q^2}{\sum q_{i,n}^2}} dx_n$$

Вставляя сюда вмѣсто Q_n его величину (IV), получимъ вѣроятность, что ξ_n есть истинная величина x_n :

$$K \cdot e^{-\sum q_{i,n}^2 (x_n - \xi_n)^2} dx_n$$

слѣд. $\sum q_{i,n}^2$ есть квадратъ мѣры точности или, что одно и то же, вѣсь опредѣленія $x_n = \xi_n$

Поступая такимъ же точно образомъ со всѣми прочими неизвѣстными т. е. оставляя при исключеніи послѣднимъ каждое изъ неизвѣстныхъ, опредѣлимъ вѣсы ихъ всѣхъ.

§ 31

Полученные такимъ образомъ вѣсы, показываютъ намъ относительную благонадежность каждаго отдѣльнаго вывода независимо отъ того, каковы при этомъ величины прочихъ неизвѣстныхъ; поэтому, если мы вычислимъ величину r_n изъ уравненія

$$2 \sqrt{\frac{\sum q_{i,n}^2}{\pi}} \int_0^{r_n} e^{-\sum q_{i,n}^2 (x_n - \xi_n)^2} dx_n = \frac{1}{2}$$

то эта величина $r_n = \frac{0,47694}{\sqrt{\sum q_{i,n}^2}}$, которую Гауссъ и Лапласъ принимали за вѣроятную погрѣш-

гдѣ черезъ p_n означенъ вѣсь вывода ξ_n , равный $\sum a_{i,n}^2$. Посмотримъ, какъ выражается Q_n черезъ $A_1, A_2 \dots A_n$. Мы видѣли выше, что величины $B_2, C_2, D_2 \dots$ выражаются чрезъ предыдущія слѣдующимъ образомъ:

$$B_2 = A_2 - \frac{\sum a_{i,2} a_{i,1}}{\sum a_{i,1}^2} A_1 \text{ и вообще } B_i = A_i - \frac{\sum a_{i,1} a_{i,i-1}}{\sum a_{i,i-1}^2} A_{i-1}$$

$$C_2 = B_2 - \frac{\sum b_{i,2} b_{i,1}}{\sum b_{i,1}^2} B_1 \text{ и вообще } C_i = B_i - \frac{\sum b_{i,1} b_{i,i-1}}{\sum b_{i,i-1}^2} B_{i-1}$$

.....

Замѣняя послѣдовательно $B_2, B_3, C_2, C_3, D_2, D_3$ и т. д. ихъ величинами, выраженными черезъ $A_1, A_2 \dots A_n$, мы опредѣлимъ всѣ $B_2, C_2, D_2 \dots$ черезъ $A_1, A_2 \dots A_n$ и легко замѣтимъ, что въ выраженіи B_2 коэффициентъ при A_2 равенъ единицѣ и вообще только при A_1 ; въ выраженіи C_2 только при A_2 , въ D_2 только при A_1 и т. д., наконецъ въ выраженіи Q_n коэффициентъ будетъ равенъ единицѣ только при A_n и слѣд. Q_n необходимо имѣть видъ:

$$Q_n = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_{n-1} A_{n-1} + A_n$$

и потому x_n будетъ необходимо вида:

$$x_n = \xi_n + \frac{A_1}{a_1^{(n)}} + \frac{A_2}{a_2^{(n)}} + \dots + \frac{A_n}{p_n}$$

т. е. $p_n = a_n^{(n)}$; такъ какъ выраженія всѣхъ x_k черезъ $A_1, A_2 \dots A_n$ совершенно сходны между собою, то необходимо должны тоже самое заключить и о другихъ неизвѣстныхъ.

§ 33.

Впослѣдствіи, когда Лапласомъ былъ доказанъ способъ наименьшихъ квадратовъ независимо отъ закона случайныхъ погрѣшностей, Гауссъ далъ новую, совершенно общую теорію способа наименьшихъ квадратовъ; этой теоріи посвящены два его мемуара, представленные Геттингенскому Королевскому Обществу въ 1821 и 1823 годахъ и дополненіе къ нимъ, относящееся къ 1826 году. Всѣ выводы и слѣдствія изъ свойства наименьшей суммы квадратовъ погрѣшностей, все, что касается до приложений теоріи къ практическимъ вопросамъ, разрѣшено въ этихъ мемуарахъ въ самомъ общемъ видѣ и, если оставить въ сторонѣ замѣченную выше неправоподобность при опредѣленіи вѣроятныхъ предѣловъ погрѣшностей результатовъ, вопросъ о приложенияхъ способа наименьшихъ квадратовъ, благодаря трудамъ Гаусса, можно считать разработаннымъ до полной степени совершенства. Но нельзя не сказать, что принципъ, на которомъ Гауссъ въ своей общей теоріи основываетъ доказательство способа наименьшихъ квадратовъ, самъ по себѣ есть совершенно произвольный и не подтвержденъ достаточными доказательствами. Гауссъ признаетъ именно a priori, что наиблагоприятнѣе опредѣленіе неизвѣстныхъ будетъ то, при которомъ средняя ошибка получаетъ наименьшую величину, разумѣя подъ именемъ средней ошибки величину

$$m = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi \varepsilon d\varepsilon}$$

т. е. корень из среднего квадрата погрешностей; Гаусс допускает определение ее из суммы квадратов погрешностей, разделенной на число наблюдений, слѣд., правило наименьшихъ квадратовъ, собственно говоря, скрывается уже въ этомъ положеніи. Основная мысль способа наименьшихъ квадратовъ состоитъ въ томъ, что вѣроятные предѣлы погрешностей пропорциональны средней ошибкѣ, какъ мы это дѣйствительно видали при частномъ законѣ вѣроятности погрешностей и при доказательствѣ арифметической среды; строгій анализъ Лапласа показываетъ, что эта пропорциональность справедлива только при условіи большаго числа наблюдений и потому Гауссъ безъ сомнѣнія приписывалъ своему положенію, допускающему бездоказательно пропорциональность средней и вѣроятной погрешности, слишкомъ большое значеніе, говоря, что съ помощью его доказывається способъ наименьшихъ квадратовъ независимо отъ числа наблюдений.

Принявъ такимъ образомъ среднюю погрешность за мѣру неисточности результата, Гауссъ называетъ количество обратно пропорціональное средней ошибкѣ мѣрою точности и количество пропорціональное квадрату мѣры точности — вѣсомъ результата.

§ 34.

Посмотримъ теперь, какъ изъ этого общаго начала, выводятся наимыгоднѣйшіе результаты и вѣсы ихъ. Помножимъ уравненія (I) (§ 27) по порядку на множители $K_{1,l}, K_{2,l}, \dots, K_{i,l}, \dots, K_{n,l}$ и потомъ сложимъ; чтобы послѣ этого преобразованія получить прямо величину x_i стоять только 3 коэффициента K опредѣлить такъ, чтобы коэффициентъ при x_i обращался въ единицу, а коэффициенты при прочихъ неизвѣстныхъ въ нуль; отбирая въ суммѣ

$$\sum [K_{i,l} S_i a_{i,k} x_k] - \sum K_{i,l} \omega_i - \sum K_{i,l} \varepsilon_i$$

коэффициенты при x_1, x_2, \dots , получимъ слѣдовательно уравненія:

$$\begin{aligned} \sum K_{i,l} a_{i,1} &= 0 \\ \sum K_{i,l} a_{i,2} &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \sum K_{i,l} a_{i,i} &= 1 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \sum K_{i,l} a_{i,n} &= 0 \end{aligned} \tag{VI}$$

число уравнений n недостаточно для определения s множителей K и слѣд. они остаются произвольными. Удовлетворяя равенствамъ (VI), будемъ имѣть просто

$$x_i = \sum K_{i,l} \omega_l + \sum K_{i,l} \varepsilon_l$$

Если бы мы взяли уравнения (I) прямо въ томъ видѣ, какъ они получаются изъ условій вопроса, предполагая наблюдения точными, то есть, допустили бы $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0$; то получили бы

$$x_i = \sum K_{i,l} \omega_l$$

слѣд. $\sum K_{i,l} \varepsilon_l$ представляетъ вліяніе погрѣшностей наблюдений на результатъ x_i , т. е. погрѣшность этого результата; мы видимъ, что эта погрѣшность зависитъ не только отъ погрѣшностей наблюдений ε_l , но и отъ выбора коэффициентовъ $K_{i,l}$, т. е. отъ способа сочетанія наблюдений. Чтобы опредѣлить среднюю погрѣшность въ опредѣленіи x_i мы должны найти среднее значеніе квадрата погрѣшности $\sum K_{i,l} \varepsilon_l$. Разлагая квадратъ этой суммы, находимъ

$$\sum K_{i,l}^2 \varepsilon_l^2 + \sum K_{i,l} K_{i,l'} \varepsilon_l \varepsilon_{l'}$$

Среднее значеніе получится, если умножимъ каждый членъ этихъ суммъ соответственно на $\varphi \varepsilon_l d\varepsilon_l$ и возьмемъ интегралъ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Замѣчая при этомъ, что вообще

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_l^2 \varphi \varepsilon_l d\varepsilon_l = m_l^2 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_l \varphi \varepsilon_{l'} d\varepsilon_l = 0$$

получаемъ очевидно для средней величины квадрата погрѣшности x_i выраженіе

$$\sum K_{i,l}^2 m_l^2$$

и слѣд. самая средняя ошибка въ опредѣленіи x_i будетъ

$$\sqrt{\sum K_{i,l}^2 m_l^2}$$

На основаніи предложеннаго выше принципа, наилучшій способъ опредѣленія x_i будетъ тотъ, при которомъ $\sqrt{\sum K_{i,l}^2 m_l^2}$ получаетъ наименьшую величину. Если всѣ наблюдения одинаково точны, т. е. имѣютъ одинаковую среднюю погрѣшность, что всегда можно допустить, когда известны всѣ наблюдены; то условіе наилучшій способъ опредѣленія x_i приводится просто къ наименьшей величинѣ $\sum K_{i,l}^2$. Весь выводъ $x_i = \sum K_{i,l} \omega_l$ въ такомъ случаѣ есть $\frac{1}{\sum K_{i,l}^2}$.

Чтобы опредѣлить наименьшее значеніе $\sum K_{i,l}^2$, обратимся къ уравненіямъ (V) (§ 32). Подставимъ въ уравненія

$$x_i = \xi_i + \frac{A_1}{\alpha_1^{(i)}} + \frac{A_2}{\alpha_2^{(i)}} + \dots + \frac{A_i}{\alpha_i^{(i)}} + \dots + \frac{A_n}{\alpha_n^{(i)}}$$

вместо A_1, A_2, \dots, A_n ихъ величины, выраженные через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, т. е.

$$A_1 = \sum_i a_{i,1} \varepsilon_i = a_{1,1} \varepsilon_1 + a_{2,1} \varepsilon_2 + \dots + a_{n,1} \varepsilon_n$$

$$A_2 = \sum_i a_{i,2} \varepsilon_i = a_{1,2} \varepsilon_1 + a_{2,2} \varepsilon_2 + \dots + a_{n,2} \varepsilon_n$$

VII)

.....

$$A_n = \sum_i a_{i,n} \varepsilon_i = a_{1,n} \varepsilon_1 + a_{2,n} \varepsilon_2 + \dots + a_{n,n} \varepsilon_n$$

Собирая коэффициенты при $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ и означая

$$\frac{a_{1,1}}{\alpha_1^{(i)}} + \frac{a_{1,2}}{\alpha_2^{(i)}} + \frac{a_{1,3}}{\alpha_3^{(i)}} + \dots + \frac{a_{1,n}}{\alpha_n^{(i)}} = \sum_k \frac{a_{1,k}}{\alpha_k^{(i)}} = L_{1,i}$$

$$\frac{a_{2,1}}{\alpha_1^{(i)}} + \frac{a_{2,2}}{\alpha_2^{(i)}} + \frac{a_{2,3}}{\alpha_3^{(i)}} + \dots + \frac{a_{2,n}}{\alpha_n^{(i)}} = \sum_k \frac{a_{2,k}}{\alpha_k^{(i)}} = L_{2,i}$$

(VIII)

.....

$$\frac{a_{n,1}}{\alpha_1^{(i)}} + \frac{a_{n,2}}{\alpha_2^{(i)}} + \frac{a_{n,3}}{\alpha_3^{(i)}} + \dots + \frac{a_{n,n}}{\alpha_n^{(i)}} + \sum_k \frac{a_{n,k}}{\alpha_k^{(i)}} = L_{n,i}$$

получимъ

$$x_i = \xi_i + \sum L_{i,t} \varepsilon_t$$

кроме того, раздѣляя уравненія (II) (§ 27) последовательно на $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}$, складывая ихъ потомъ между собою и сравнивая сумму съ выраженіемъ x_i черезъ A_1, A_2, \dots, A_n , легко убѣдимся, что коэффициенты $L_{1,i}, L_{2,i}$ и пр. удовлетворяютъ условіямъ (VI) и что

$$\xi_i = \sum L_{i,t} \omega_t$$

т. е.

$$x_i = \sum L_{i,t} \omega_t + \sum L_{i,t} \varepsilon_t$$

следовательно между коэффициентами $K_{i,t}$ должно считать также коэффициенты $L_{i,t}$. Вычитая два выраженія x_i одно изъ другаго, получимъ тождественное уравненіе

$$\sum L_{i,t} \omega_t - \sum K_{i,t} \omega_t = \sum (K_{i,t} - L_{i,t}) \varepsilon_t$$

которое должно быть удовлетворено независимо от величин x_1, x_2, \dots, x_n ; так что, после подстановки вместо ϵ_i их величин коэффициенты при x_1, x_2, \dots должны necessarily обратиться в нуль, отчего получаются уравнения:

$$\sum (K_{i,l} - L_{i,l}) a_{i,l} = 0$$

$$\sum (K_{i,l} - L_{i,l}) a_{i,2} = 0$$

.....

$$\sum (K_{i,l} - L_{i,l}) a_{i,n} = 0$$

Разделяя их последовательно на $\alpha_i^{(0)}, \alpha_i^{(0)} \dots \alpha_n^{(0)}$ и складывая, получим

$$\sum [(K_{i,l} - L_{i,l}) S_i^n \frac{a_{i,k}}{\alpha_i^{(0)}}] = 0$$

т. е.

$$\sum [(K_{i,l} - L_{i,l}) L_{i,l}] = 0,$$

что можно легко преобразовать в

$$\sum L_{i,l}^2 = \sum K_{i,l}^2 - \sum (K_{i,l} - L_{i,l})^2,$$

откуда необходимо следует, что $\sum L_{i,l}^2$ есть наименьшая величина $\sum K_{i,l}^2$. Таким образом мы убеждаемся, что невыгоднейшее определение x_i есть $\xi_i = \sum L_{i,l} \omega_l$ и что всё этого определения, обратно пропорциональный средней ошибке, равен $\frac{1}{\sum L_{i,l}^2}$. Заменяя в ур. (VI) $K_{i,l}$ через $L_{i,l}$, помножая их последовательно на $\frac{1}{\alpha_i^{(0)}}, \frac{1}{\alpha_i^{(0)}} \dots \frac{1}{\alpha_n^{(0)}}$ и складывая, найдем

$$\sum [L_{i,l} S_i^n \frac{a_{i,k}}{\alpha_i^{(0)}}] = \sum L_{i,l}^2 = \frac{1}{\alpha_i^{(0)}}$$

т. е. всё $\frac{1}{\sum L_{i,l}^2}$ по прежнему есть $\alpha_i^{(0)}$. Само собою понятно, что коэффициенты $L_{i,l}$ соответствуют способу наименьших квадратов, потому что полученные помощью этих множителей результаты $x_i = \xi_i$ удовлетворяют условиям $A_1 = 0; A_2 = 0$ и пр. т. е. $\sum \epsilon_i \frac{d\epsilon_i}{dx_i} = 0$;

$\sum \epsilon_i \frac{d\epsilon_i}{dx_i} = 0$ и пр. и след. наименьшей величиной $\sum \epsilon_i^2$.

§ 35.

Въ заключение этого изложения Гауссовых изслѣдованій о способѣ наименьшихъ квадратовъ выведемъ замѣчательную формулу для выраженія средней ошибки наблюдений чрезъ сравненіе результатовъ съ наблюденіями. Для изысканія наилучшійшихъ результатовъ имѣть собственно надобности знать самыя среднія ошибки отдѣльныхъ наблюдений m_1, m_2, \dots, m_s ; нужно знать только ихъ отношенія или вѣсы наблюдений p_1, p_2, \dots, p_s . Отъ произведенія каждаго наблюденія на квадратный корень изъ соответствующаго ему вѣса всѣ среднія ошибки приводятся къ одной величинѣ

$$m = m_1 \sqrt{p_1} = m_2 \sqrt{p_2} = \dots = m_s \sqrt{p_s}$$

и если известна величина m , то будутъ известны и прочія величины m_1, m_2, \dots, m_s . Величина m , означающая среднюю погрѣшность тѣхъ наблюдений, вѣсы которыхъ принять за единицу, можетъ быть вычислена a posteriori весьма приближенно при помощи полученныхъ уже результатовъ слѣдующимъ образомъ.

Если въ данныя изъ наблюдений уравненія подставимъ вмѣсто неизвѣстныхъ x_1, x_2, \dots, x_n ихъ вѣроятнѣйшія величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, опредѣленные по способу наименьшихъ квадратовъ, то получимъ систему погрѣшностей E_1, E_2, \dots, E_s . Величина средней ошибки вычисленная помощью этихъ погрѣшностей, т. е.

$$\sqrt{\frac{\sum E_i^2}{n}}$$

безъ сомнѣнія разнится отъ истинной величины и необходимо менѣе ея, потому что $\sum E_i^2$ есть наименьшее изъ всѣхъ возможныхъ значеній $\sum e_i^2$. Чтобы получить болѣе точное опредѣленіе m , вычислимъ a posteriori вѣроятнѣйшее значеніе $\sum e_i^2$. Для этого выразимъ $\sum e_i^2$ въ видѣ

$$\sum e_i^2 = A_1(x_1 - \xi_1) + A_2(x_2 - \xi_2) + \dots + A_n(x_n - \xi_n) + \sum E_i^2 = \sum_1^n A_k(x_k - \xi_k) + \sum E_i^2$$

къ которому ее легко привести слѣдующимъ образомъ: вычтя равенства

$$\sum e_i^2 = \sum [(S_i^* \sigma_{i,k} x_k - v_i)^2]$$

$$\sum E_i^2 = \sum [(S_i^* \sigma_{i,k} \xi_k - v_i)^2]$$

соединя суммы \sum и замѣняя разность квадратовъ произведемъ суммъ на разность, мы получаемъ

$$\sum e_i^2 - \sum E_i^2 = \sum [(S_i^* \sigma_{i,k} (x_k + \xi_k) - 2v_i) (S_i^* \sigma_{i,k} (x_k - \xi_k))]]$$

$$= \sum [(S_i^n a_{i,k} x_k - \omega_i) (S_i^n a_{i,k} (x_k - \xi_k))] + \sum [(S_i^n a_{i,k} \xi_k - \omega_i) (S_i^n a_{i,k} (x_k - \xi_k))]$$

По свойству величин ξ_k

$$S_i^n a_{i,k} \xi_k - \omega_i = 0$$

и слѣд. второй членъ уничтожается; величина же $S_i^n a_{i,k} x_k - \omega_i$ есть ϵ_i , внося ее подъ знакъ S и обращая внимание на ур. (VII) (§ 34)

$$A_k = \sum a_{i,k} \epsilon_i$$

мы находимъ требуемое выражение

$$\sum \epsilon_i^2 = \sum E_i^2 + S_i^n A_k (x_k - \xi_k)$$

Если положимъ, что истинныя величины x_1, x_2, \dots, x_n , которымъ соответствуютъ действительныя погрѣшности $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, суть $x_k = \xi_k + \Delta x_k$; то имѣемъ (§ 34)

$$x_k - \xi_k = \Delta x_k = \sum L_{i,k} \epsilon_i$$

и подставляя находимъ

$$\sum \epsilon_i^2 = \sum E_i^2 + S_i^n [A_k \sum L_{i,k} \epsilon_i]$$

Если черезъ m означимъ истинную величину средней ошибки, то при очень большомъ числѣ наблюдений $\sum \epsilon_i^2$ имѣетъ весьма приближенно величину nm^2 ; среднее значеніе каждаго члена $A_k \sum L_{i,k} \epsilon_i$ получимъ, если вставимъ на мѣсто A_k выраженія въ функціи погрѣшностей (ур. VII, § 34).

$$A_k = \sum a_{i,k} \epsilon_i$$

По уничтоженіи произведеній $\epsilon_i \epsilon_i'$, средняя величина которыхъ равна нулю, останутся только члены, содержащіе квадраты ϵ_i^2 , средняя величина которыхъ есть m^2 ; поэтому среднее значеніе $A_k \sum L_{i,k} \epsilon_i$ будетъ $m^2 \sum a_{i,k} L_{i,k}$ и слѣдовательно

$$nm^2 = \sum E_i^2 + m^2 S_i^n \left[\sum a_{i,k} L_{i,k} \right]$$

Но для результатовъ, опредѣляемыхъ по способу наименьшихъ квадратовъ, т. е. посредствомъ множителей $L_{i,k}$, по условіямъ (VI) (§ 34) необходимо имѣемъ

$$\sum a_{i,k} L_{i,k} = 1,$$

поэтому

$$S_i^n \left[\sum a_{i,k} L_{i,k} \right] = n$$

и мы получаемъ

$$sm^2 = \sum E_i^2 + nm^2$$

откуда находимъ возможно точную величину средней ошибки, вычисленную a posteriori:

$$m = \sqrt{\frac{\sum E_i^2}{s-n}}$$

Въ томъ случаѣ, когда уравненія имѣютъ различные вѣсы, величина s должна быть замѣнена выраженіемъ $\sum p_i$ и мы имѣемъ

$$m = \sqrt{\frac{\sum E_i^2}{\sum p_i - n}}$$

§ 36.

Помощію Гауссовыхъ теорій вопросъ о наилучшемъ сочетаніи разрѣшается вполне въ практическомъ отношеніи, потому что при сочетаніи наблюдений по способу наименьшихъ квадратовъ, къ которому приводить эту теорію, устраняется всякая неопредѣленность въ соединеніи уравненій, полученныхъ изъ наблюдений; но ни частная, ни общая теорія Гаусса не даютъ намъ яснаго понятія о томъ, въ какой мѣрѣ и при какихъ обстоятельствахъ правило наименьшихъ квадратовъ можетъ дать благонадежные, приближающіеся къ истинѣ результаты. Между тѣмъ понятію, что на какихъ бы началахъ не основывалось рѣшеніе вопроса о наилучшемъ сочетаніи наблюдений, подверженныхъ случайнымъ ошибкамъ, заключенія могутъ оставаться справедливыми только въ нѣкоторыхъ границахъ. Въ частной теоріи Гаусса признается основнымъ началомъ правило арифметической среды, которое само по себѣ имѣетъ только приближенное значеніе, въ общей же теоріи Гаусса принято совершенно произвольное начало, требующее само по себѣ доказательства и поясненія. Оцѣнка справедливости этихъ началъ должна основываться на общихъ началахъ Теоріи Вѣроятностей; такимъ образомъ строгій анализъ Лапласа служить необходимымъ дополненіемъ и поясненіемъ общепринятыхъ Гауссовыхъ теорій.

Единственное ограниченіе, которому Лапласъ даетъ мѣсто въ своемъ доказательствѣ способа наименьшихъ квадратовъ, состоитъ въ допущеніи только такихъ сочетаній данныхъ уравненій, при которыхъ выводимыя уравненія получаютъ линейный видъ; допущеніе необходимое, потому что во всякомъ другомъ случаѣ невозможно бы были приложенія теоріи къ практическимъ задачамъ по причинѣ чрезвычайно сложныхъ вычисленій. Это допущеніе совершенно подобно упомянутому въ §§ 4 и 10 выбору арифметической среды между другими средними выводами на основаніи не только большей простоты, но и существенной въ практическомъ отношеніи необходимости. Соединеніе данныхъ наблюдений, приведенныхъ въ линейныя функціи поправки, помощію постоянныхъ множителей есть именно то, которое вообще даетъ выводимымъ уравненіямъ линейный видъ; поэтому вопросъ о наилучшемъ линейномъ сочетаніи наблюдений приводится очевидно къ изысканію такихъ множителей, при которыхъ наиболѣе тѣсны предѣлы погрѣшностей неизвѣстныхъ, соответствующіе дан-

ной вероятности. Решимъ этотъ вопросъ для того случая, когда уравненія содержатъ только одну неизвѣстную величину.

Помножимъ уравненія:

$$a_i x - \omega_i = \varepsilon_i$$

на произвольныхъ множителяхъ K_i и, сложивъ полученные произведенія, положимъ

$$K_1 \varepsilon_1 + K_2 \varepsilon_2 + \dots + K_s \varepsilon_s = \Sigma K_i \varepsilon_i = 0;$$

тогда величина x опредѣлится изъ уравненія

$$x \Sigma K_i a_i - \Sigma K_i \omega_i = 0;$$

и будетъ

$$x = \frac{\Sigma K_i \omega_i}{\Sigma K_i a_i}.$$

Опредѣленіе это будетъ тѣмъ ближе къ истинѣ, чѣмъ болѣе вероятно предположеніе $\Sigma K_i \varepsilon_i = 0$; вероятность же этого предположенія зависитъ очевидно отъ выбора коэффициентовъ K_i , слѣд. вопросъ о наилучшемъ опредѣленіи x приводится къ нахожденію такихъ коэффициентовъ K_i , для которыхъ предположеніе $\Sigma K_i \varepsilon_i = 0$ имѣетъ наибольшую вероятность. Вообще невозможно найти такихъ величинъ для произвольныхъ K_i , для которыхъ бы уравненіе $\Sigma K_i \varepsilon_i = 0$ существовало въ строгомъ смыслѣ, потому что погрѣшности ε_i совершенно неизвѣстны. Если положить $\Sigma K_i \varepsilon_i = l$, то выведенная выше величина x измѣнится и, называя погрѣшность ея черезъ Δx , будемъ имѣть

$$\Delta x = \frac{l}{\Sigma K_i a_i}.$$

§ 37.

Опредѣлимъ вероятность, что $\Sigma K_i \varepsilon_i$ заключается между предѣлами $\pm l$. Для этого нужно интегрировать функцію

$$p_l = \iiint \dots \varphi \varepsilon_1 \varphi \varepsilon_2 \dots \varphi \varepsilon_s \, d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_s$$

между предѣлами, согласными съ этимъ предположеніемъ. Прилагая теорему Дирикле, получаемъ

$$p_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} dl \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-lxi} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_1 e^{K_1 \varepsilon_1 xi} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_2 e^{K_2 \varepsilon_2 xi} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_s e^{K_s \varepsilon_s xi} d\varepsilon_s,$$

или

$$p_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} dl \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-lxi} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_1 \cos K_1 \varepsilon_1 x \, d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_2 \cos K_2 \varepsilon_2 x \, d\varepsilon_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_s \cos K_s \varepsilon_s x \, d\varepsilon_s,$$

Означая p_l подь видоь

$$p_l = \int_{-l}^{+l} P_l dl$$

мы видимъ, что

$$P_l dl = \frac{dl}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-lax} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_1 \cos K_1 \varepsilon_1 a d\varepsilon_1, \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_n \cos K_n \varepsilon_n a d\varepsilon_n,$$

есть вѣроятность, что сумма $\Sigma K_i \varepsilon_i$ равна числу l . Разлагая для приближеннаго исчисления косинусы въ ряды и ограничиваясь вторыми степенями α , найдемъ вообще

$$\cos K_i \varepsilon_i \alpha \approx 1 - \frac{\varepsilon_i^2}{2} K_i^2 \alpha^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon_i \cos K_i \varepsilon_i \alpha d\varepsilon_i = 1 - \frac{l^2}{2} K_i^2 \alpha^2 = e^{-\frac{l^2}{2} K_i^2 \alpha^2}$$

и, соединяя всѣ подобные интегралы, получимъ

$$P_l dl = \frac{dl}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(lax + \frac{l^2}{2} \Sigma K_i^2 \alpha^2\right)} dx.$$

Дополняя въ показателѣ до полного квадрата, найдемъ окончательно:

$$P_l dl = \frac{dl}{\sqrt{2\pi\mu_2 \Sigma K_i^2}} e^{-\frac{l^2}{2\mu_2 \Sigma K_i^2}}$$

Изъ этого выраженія видно, что самая вѣроятная величина суммы $\Sigma K_i \varepsilon_i$ есть нуль. — Интегрируя, получимъ

$$p_l = \int_{-l}^{+l} P_l dl = 2 \int_0^l P_l dl = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu_2 \Sigma K_i^2}} \int_0^l e^{-\frac{t^2}{2\mu_2 \Sigma K_i^2}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt, \text{ гдѣ } \tau = \frac{l}{\sqrt{2\mu_2 \Sigma K_i^2}}$$

Вѣроятность, что погрѣшность Δx въ опредѣленіи x помощію множителей K_i заключается между предѣлами $\pm \frac{l}{\Sigma K_i \varepsilon_i}$ получится, если подставимъ вмѣсто l его величину $\Delta x \Sigma K_i \varepsilon_i$; эта вѣроятность будетъ

$$p_l = \frac{2 \Sigma K_i \varepsilon_i}{\sqrt{2\pi\mu_2 \Sigma K_i^2}} \int_0^{\Delta x} e^{-\frac{(\Sigma K_i \varepsilon_i)^2}{2\mu_2 \Sigma K_i^2} \Delta x^2} d\Delta x$$

Сделаем $\Delta x \frac{\Sigma K_i a_i}{\sqrt{2\mu_2 \Sigma K_i^2}} = t$; тогда будем иметь

$$p_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{|t|} e^{-t^2} dt$$

и p_t означает вероятность, что погрешность Δx не превосходит предельной

$$\pm t \cdot \sqrt{2\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{K \Sigma_i^2}}{\Sigma K_i a_i}$$

При данной величине t эта вероятность p_t остается постоянною и след. предельной погрешности Δx пропорциональны во первых $\sqrt{\mu_2}$ т. е. средней ошибке наблюдений и во вторых к множителю $\frac{\sqrt{\Sigma K_i^2}}{\Sigma K_i a_i}$, зависящему от выбора коэффициентов K_i . Так как этот результат выведем приближенно и только при условии очень большого числа наблюдений может быть принят, как достоверный; то теперь мы видим, в какой мере справедливо положение, служащее основанием общей теории Гаусса. Что касается до самого выгодного выбора коэффициентов K_i , то мы, чтобы сделать предельные погрешности при всякой вероятности возможно меньшими, должны очевидно удовлетворить наименьшему значению функции

$$\frac{\sqrt{\Sigma K_i^2}}{\Sigma K_i a_i}$$

считая в ней за переменные величины множители K_i . Приравнявая нулю производные этой функции, взяты относительно каждой из величин K_1, K_2, \dots, K_s , получим уравнения:

$$K_1 = \frac{\Sigma K_i^2}{\Sigma K_i a_i} a_1; K_2 = \frac{\Sigma K_i^2}{\Sigma K_i a_i} a_2, \dots, K_s = \frac{\Sigma K_i^2}{\Sigma K_i a_i} a_s$$

множитель $\frac{\Sigma K_i^2}{\Sigma K_i a_i}$ не зависит от i и одинаков для всех величин K_i , полагая его для краткости равным λ , имеем

$$K_1 = \lambda a_1; K_2 = \lambda a_2, \dots, K_s = \lambda a_s$$

и, подставляя эти величины в выражение x , найдем его вероятнейшее значение ξ ; именно

$$\xi = \frac{\Sigma a_i \omega_i}{\Sigma a_i^2}$$

результат, как мы уже видели не один раз происходящий из условия наименьшей суммы квадратов погрешностей.

Наименьшая величина функции $\frac{\sqrt{\Sigma K_i^2}}{\Sigma K_i a_i}$ будет $\frac{1}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}$; в этом можно убедиться также непосредственно, рассматривая тождественное равенство

$$[K_1 a_1]^2 + (K_1 a_1 - K_2 a_1)^2 + (K_1 a_1 - K_2 a_1)^2 + \dots = (\Sigma K_i^2) \cdot (\Sigma a_i^2)$$

изъ котораго прямо слѣдуетъ, что

$$\frac{\sqrt{\Sigma K_i^2}}{\Sigma K_i a_i} < \frac{1}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}$$

первая часть неравенства обращается во вторую только въ предположеніи $K_i = \lambda a_i$, потому что только при этомъ условіи всѣ разности вида $K_i a_i' - K_i' a_i$ обращаются въ нули.

Лапласъ распространяетъ правило наименьшихъ квадратовъ на случай многихъ неизвѣстныхъ помощью подобнаго же анализа; мы не будемъ останавливаться на этомъ, потому что въ слѣдующей главѣ изложимъ совершенно общую теорію, основанія которой совершенно одинаковы съ тѣми, которыми руководствовался Лапласъ въ изслѣдованіяхъ о способѣ наименьшихъ квадратовъ.

ГЛАВА III.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗЫСКАНИЯ НАИВЫГОДИЙШИХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ УСЛОВИИ ЛИЦЕВНАГО СОЧЕТАНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЪРОЯТНЫХ ПРЕДЪЛКОВ ПОГРЪШНОСТЕЙ ВЫВОДОВЪ.

§ 38.

Представимъ теперь рѣшеніе вопроса о наивыгодийшихъ результатахъ въ самомъ общемъ видѣ, ограничивая его однимъ только предположеніемъ, что выводныя уравненія должны имѣть линейный видъ. Самый общій приемъ для соединенія уравненій (I) (§ 27) при такомъ условіи состоитъ въ томъ, что эти уравненія умножаются на произвольныя множители и потомъ складываются между собою. Если будемъ разсматривать уравненія (I) въ томъ видѣ, какъ они получены изъ наблюдений, т. е. положимъ $\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0 \dots \varepsilon_i = 0$: то умножая всѣ эти уравненія по порядку сперва на множители

$$K_{1,1}, K_{2,1}, K_{3,1}, \dots, K_{i,1}, \dots, K_{s,1}$$

и складывая, потомъ умножая на другихъ множителей

$$K_{1,2}, K_{2,2}, K_{3,2}, \dots, K_{i,2}, \dots, K_{s,2}$$

и складывая, продолжая такимъ же образомъ и наконецъ останавливаясь на системѣ множителей:

$$K_{1,n}, K_{2,n}, \dots, K_{i,n}, \dots, K_{s,n}$$

мы получимъ n уравненій для опредѣленія n неизвѣстныхъ $x_1, x_2 \dots x_n$:

$$\begin{aligned} K_{1,1} \sum_i^n a_{i,1} x_i - \sum K_{1,i} \omega_i &= 0 \\ K_{1,2} \sum_i^n a_{i,2} x_i - \sum K_{1,2} \omega_i &= 0 \\ \dots \dots \dots & \\ K_{1,n} \sum_i^n a_{i,n} x_i - \sum K_{1,n} \omega_i &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

рыми величинами x_1, x_2, \dots, x_n , если только в самой задаче быть неопределенности или несообразности. В таком случае стоило бы только определить x_1, x_2, \dots, x_n из n уравнений произвольно взятых между уравнениями (1); прочие уравнения должны бы тождественно удовлетворяться найденными величинами x_1, x_2, \dots, x_n . Но, если наблюдения содержат погрешности, то выходит совсем другое: уравнения (1) не удовлетворяются одновременно никакими величинами, приписанными неизвестным, и всегда получается во второй части некоторая величина, отличная от нуля. Назовем через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ неизвестная нам величины погрешностей, сделанные необходимо при измерении $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и через $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ошибки неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n , вычисленных по ур. (3) в предположении $\varepsilon_i = 0$; $\varepsilon_i = 0, \dots$. Подставляя вместо ω_i истинные значения $\omega_i + \varepsilon_i$ и вместо x_k точные величины $x_k + \Delta x_k$, получим

$$x_k + \Delta x_k = \sum K_{i,k} (\omega_i + \varepsilon_i)$$

откуда

$$\Delta x_k = \sum K_{i,k} \varepsilon_i$$

следовательно погрешности в определении неизвестных зависят от погрешностей наблюдений и от коэффициентов K . Так как величины ε_i вообще совершенно неизвестны, то нет никакой возможности найти точные величины ошибок Δx_k и след. определять точно неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n ; но вышеупомянутая неопределенность множителей K может служить нам средством к тому, чтобы сделать вероятными величины Δx_k возможно малыми и найти таким образом самые выгодные, возможно точные величины для x_1, x_2, \dots, x_n . Чтобы достигнуть до этого, нужно прежде всего определять вероятность, что погрешности неизвестных заключаются между некоторыми пределами и потом определять при каких коэффициентах K пределы погрешностей будут самые тисные; выбор таких коэффициентов поведет очевидно к самому выгодному определению неизвестных.

§ 39.

Каждой системе погрешностей ε_i соответствует известная система величин Δx_k , потому что всё они определяются через ε_i помощью уравнений вида

$$\Delta x_k = \sum K_{i,k} \varepsilon_i$$

из этого мы заключаем, что сложная вероятность погрешностей ε_i одного рода наблюдений

$$p = \iiint \dots \varphi \varepsilon_1 \varphi \varepsilon_2 \dots \varphi \varepsilon_n d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n$$

есть в тоже время вероятность соответствующих величин Δx_k . Если погрешности неизвестных $\sum K_{i,k} \varepsilon_i$ не должны превосходить соответственно предельное $\pm r_k$, то в выражении p интегралы должны распространить только на такие величины ε_i , которая удовлетворяют этому условию. Прилагая к этому случаю способ Дирикле, мы должны элемент интеграла помножить на функцию

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-r_1}^{+r_1} dr_1 \int_{-r_2}^{+r_2} dr_2 \dots \int_{-r_n}^{+r_n} dr_n \iiint \dots e^{-r_1 \alpha_1 i - r_2 \alpha_2 i - \dots - r_n \alpha_n i} S_1^n [\alpha_k \sum K_{i,k} \varepsilon_i] da_1 da_2 \dots da_n$$

и распространить тогда пределы на все возможные величины ε_i , т. е. от $-\infty$ до $+\infty$. Вероятность, что погрешности $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ равны именно r_1, r_2, \dots, r_n , есть

$$P dr_1 dr_2 \dots dr_n,$$

где P есть относительная вероятность такого предположения и

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \iiint \dots e^{-i S_1^n r_k \alpha_k} da_1 da_2 \dots da_n \iiint \dots e^{i S_1^n [\alpha_k \sum K_{i,k} \varepsilon_i]} \varphi \varepsilon_1 \varphi \varepsilon_2 \dots \varphi \varepsilon_n d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n,$$

Равенство

$$S_1^n [\alpha_k \sum K_{i,k} \varepsilon_i] = \sum [\varepsilon_i S_1^n K_{i,k} \alpha_k]$$

доставляет возможность отделять переменные в интегралах, вынося относительно переменных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ и мы получаем

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i S_1^n r_k \alpha_k} da_1 da_2 \dots da_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \varepsilon_1 S_1^n K_{1,k} \alpha_k} \varphi \varepsilon_1 d\varepsilon_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \varepsilon_n S_1^n K_{n,k} \alpha_k} \varphi \varepsilon_n d\varepsilon_n$$

Все интегралы, относительно ε подобны между собою; рассмотрим один из них, напр.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \varepsilon_1 S_1^n K_{1,k} \alpha_k} \varphi \varepsilon_1 d\varepsilon_1$$

Положим для краткости

$$S_1^n K_{i,k} \alpha_k = S_i$$

и разложим показательную функцию в ряд; означая по прежнему

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^m \varphi \varepsilon d\varepsilon = \mu_m$$

получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\epsilon_i} S_i \varphi_{\epsilon_i} d\epsilon_i = 1 + i\mu_1 S_i - \frac{\mu_2}{1.2} S_i^2 - i \frac{\mu_3}{1.2.3} S_i^3 + \frac{\mu_4}{1.2.3.4} S_i^4 + \dots$$

или, обращая рядъ въ показательную функцию,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\epsilon_i} S_i \varphi_{\epsilon_i} d\epsilon_i = e^{i\mu_1 S_i - \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2) S_i^2 - i \frac{\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3}{1.2.3} S_i^3 + \dots}$$

называя для сокращения коэффициенты при S_i^2, S_i^3, \dots через M_2, M_3, \dots , получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\epsilon_i} S_i \varphi_{\epsilon_i} d\epsilon_i = e^{i\mu_1 S_i - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S_i^2 - i M_3 S_i^3 + M_4 S_i^4 + \dots}$$

При однородныхъ наблюденияхъ среднія величины μ_m суть величины постоянныя; вышеизложенные приемы Гаусса даютъ возможность привести къ этому случаю и наблюдения разнаго достоинства и потому мы не уменьшаемъ общности вопроса, предполагая законъ вѣроятности погрѣшностей одинаковымъ для всѣхъ наблюдений. Среднія величины μ_1, μ_2, \dots при полномъ исключеніи постоянныхъ погрѣшностей обращаются въ нули; но такъ какъ подобное допущеніе мало упрощаетъ вычисления, то мы ихъ удержимъ и въ такомъ случаѣ анализъ получаетъ болѣе общее значеніе, относясь и къ такимъ наблюдениямъ, для которыхъ извѣстна постоянная часть погрѣшностей.

§ 40.

Внесемъ теперь найденное выраженіе интеграла относительно ϵ_i въ величину P ; соединяя всѣ другіе интегралы, выражающіеся точно такимъ же образомъ, въ одну показательную функцию, получимъ

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-S_i^n \alpha_k + i\mu_1 \Sigma S_i - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \Sigma S_i^2 - i M_3 \Sigma S_i^3 + M_4 \Sigma S_i^4 + \dots} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Всѣ члены показателя зависятъ отъ переменныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, потому что

$$S_i = S_i^n K_{i,k} \alpha_k$$

и

$$\Sigma S_i^m = \Sigma [S_i^n K_{i,k} \alpha_k]^m = \Sigma [K_{i1} \alpha_1 + K_{i2} \alpha_2 + \dots + K_{in} \alpha_n]^m;$$

не производя возвышенія въ степень и разложенія суммы Σ на отдѣльные члены, мы увидимъ, что разложеніе ΣS_i^m состоитъ изъ членовъ порядка m относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Первыя двѣ суммы ΣS_i и ΣS_i^2 будутъ:

$$\Sigma S_i = \Sigma S_i^n K_{i,k} \alpha_k = S_i^n [\alpha_k \Sigma K_{i,k}]$$

и

$$\Sigma S_i^2 = \Sigma [S_i^n K_{i,k} \alpha_k]^2 = \Sigma [S_i^{2n} K_{i,k}^2 \alpha_k^2 + S (K_{i,k} K_{i,k}' \alpha_k \alpha_k')] - S_i^{2n} [\alpha_k^2 \Sigma K_{i,k}^2] + S [\alpha_k \alpha_k' \Sigma K_{i,k} K_{i,k}'],$$

гдѣ знак S безъ указателей распространяется на всѣ различныя между собою значенія k и k' между предѣлами 1 и n . Если условимся, что $k < k'$, то сумма S должна быть удвоена.

Оставляя въ показателѣ только тѣ члены, которые содержатъ первую и вторую степени α , обратимъ остальной множителя, зависящаго отъ высшихъ порядковъ α , въ рядъ; означая черезъ N_1, N_2, \dots члены этого разложения, содержащія $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ въ степеняхъ и произведеніяхъ третьяго, четвертаго и т. д. порядковъ, получимъ

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-iS_i^n r_k \alpha_k + i\mu_1 S_i^n (\alpha_k \Sigma K_{i,k}) - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} [S_i^{2n} (\alpha_k^2 \Sigma K_{i,k}^2) + (\alpha_k \alpha_{k'} \Sigma K_{i,k} K_{i,k}')] } [1 - iN_2 + N_4 - \dots] d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

гдѣ

$$N_2 = \frac{\mu_2 - 3\mu_1\mu_1 + 2\mu_1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Sigma [S_i^n K_{i,k} \alpha_k]^2$$

$$N_4 = \frac{\mu_4 - 4\mu_2\mu_2 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Sigma [S_i^n K_{i,k} \alpha_k]^4$$

.....

Соединимъ въ показателѣ члены, зависящіе отъ первыхъ степеней α_k , получимъ

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-iS_i^n \alpha_k [r_k - \mu_1 \Sigma K_{i,k}] - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} [S_i^{2n} (\alpha_k^2 \Sigma K_{i,k}^2) + S (\alpha_k \alpha_{k'} \Sigma K_{i,k} K_{i,k}')] } [1 - iN_2 + N_4 - \dots] d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

§ 41.

Для приведенія этого интеграла къ простѣйшему виду Бьенеме употребляетъ слѣдующія преобразованія.

Можно во первыхъ вмѣсто разности $r_k - \mu_1 \Sigma K_{i,k}$ ввести новое переменное; положимъ

$$r_k - \mu_1 \Sigma K_{i,k} = \lambda \rho_k$$

и

$$dr_k = \lambda d\rho_k;$$

множителемъ λ можемъ распорядиться такъ, чтобы выборъ его послужилъ къ нѣкоторымъ сокращеніямъ. Въ членѣ показателя, который зависитъ отъ вторыхъ измѣреній относительно

α_k , можно уничтожить постояннаго множителя $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}$, положивъ

$$y_l = \sum_{k=1}^{k=n} h_{lk} z_k + t_l i$$

Указатели при неопределенных коэффициентах оба распространяются отъ 1 до n и первый изъ нихъ относится къ порядку переменныхъ y , а второй къ z . Показателя при l въ выраженіи гѣрцности r можно привести къ суммѣ квадратовъ переменныхъ y и i выборомъ приличныхъ величинъ h и t . Возьмѣмъ сумму квадратовъ всѣхъ возможныхъ значеній y_l ; получимъ

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{l=n} (y_l^2 + t_l^2) &= \sum_{l=1}^{l=n} \left[\sum_{k=1}^{k=n} h_{lk} z_k \right]^2 + 2i \sum_{l=1}^{l=n} \left[t_l \sum_{k=1}^{k=n} h_{lk} z_k \right]; \\ \sum_{l=1}^{l=n} \left[\sum_{k=1}^{k=n} h_{lk} z_k \right]^2 &= \sum_{l=1}^{l=n} \sum_{k=1}^{k=n} h_{l,k}^2 z_k^2 + 2 \sum_{l=1}^{l=n} \sum_{k=1}^{k=n} z_k z_{k'} h_{l,k} h_{l,k'}; \end{aligned}$$

въ последнемъ членѣ вторая сумма распространяется на всѣ значенія k и k' отъ 1 до n съ условіемъ $k' > k$; если разложимъ эту сумму на отдѣльные члены и соберемъ потомъ коэффициенты при одинаковыхъ произведеніяхъ, то получимъ безъ труда

$$\sum_{l=1}^{l=n} \sum_{k=1}^{k=n} z_k z_{k'} h_{l,k} h_{l,k'} = \sum_{k=1}^{k=n} z_k z_{k'} \left(h_{l,k} h_{l,k'} + h_{2,k} h_{2,k'} + \dots + h_{n,k} h_{n,k'} \right)$$

съ прежнимъ условіемъ $k' > k$; можно короче обозначить это разложеніе такъ:

$$\sum_{l=1}^{l=n} \sum_{k=1}^{k=n} z_k z_{k'} h_{l,k} h_{l,k'} = \sum_{k=1}^{k=n} \left[z_k z_{k'} \sum_{l=1}^{l=n} h_{l,k} h_{l,k'} \right].$$

Изъ этого выраженія при частномъ предположеніи $k = k'$ получаемъ:

$$\sum_{l=1}^{l=n} \sum_{k=1}^{k=n} z_k^2 h_{l,k}^2 = \sum_{k=1}^{k=n} \left[z_k^2 \sum_{l=1}^{l=n} h_{l,k}^2 \right]$$

Изъ того же выраженія по аналогіи должны допустить

$$\sum_{l=1}^{l=n} \left[t_l \sum_{k=1}^{k=n} h_{l,k} z_k \right] = \sum_{l=1}^{l=n} \sum_{k=1}^{k=n} z_k h_{l,k} t_l = \sum_{l=1}^{l=n} \left[z_k \sum_{l=1}^{l=n} h_{l,k} t_l \right]$$

что впрочем легко подтвердить непосредственнымъ разложениемъ. Вставляя найденныя выражения суммъ и замѣчая, что $S_i^n (y_i^2 + t_i^2)$ есть одно и то же что $S_i^n (y_k^2 + t_k^2)$, получимъ:

$$S \left[y_k^2 + t_k^2 \right] = S \left[z_k^2 S^{h_{i,k}^2} \right] + 2S \left[z_k z_k' S^{h_{i,k} h_{i,k}'} \right] + 2i S \left[z_k S^{i h_{i,k}} \right]$$

Возвратимся къ выраженію вероятности p ; подчиняя указатели k и k' условию $k' > k$, мы имѣемъ

$$p = \frac{1}{\pi^n} \cdot \iiint d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_n \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-[S_i^n (z_k \Sigma K_{i,k}) + 2S_i^n (z_k z_k' \Sigma K_{i,k} h_{i,k}') + 2i S_i^n z_k \rho_k]} (1-iZ_0 + Z_i - \dots) dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

Сравнивая теперь почленно показателя при e въ выраженіи p съ величиною $S_i^n (y_k^2 + t_k^2)$, мы видимъ что ихъ можно сдѣлать тождественными, подчиняя коэффициенты h условиямъ:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{l=k} K_{i,k}^2 &= S^{h_{i,k}^2} \\ \sum_{l=1}^{l=k} K_{i,k} K_{i,k}' &= S^{h_{i,k} h_{i,k}'} \end{aligned}$$

и опредѣляя неизвѣстныя $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ чрезъ t_1, t_2, \dots, t_n помощью уравненій:

$$\rho_k = S^{t h_{i,k}}$$

Очевидно что уравненій для опредѣленія h и t чрезъ K и ρ будетъ именно столько, сколько нужно по числу различать h и t . Давая числамъ h и k всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до n получимъ для опредѣленія различныхъ h слѣдующія группы уравненій:

$$\begin{aligned} h_{1,1}^2 &= \Sigma K_{1,1}^2 \\ h_{1,2}^2 + h_{2,2}^2 &= \Sigma K_{1,2}^2 \\ h_{1,3}^2 + h_{2,3}^2 + h_{3,3}^2 &= \Sigma K_{1,3}^2 \\ \dots & \dots \\ h_{1,k}^2 + h_{2,k}^2 + h_{3,k}^2 \dots + h_{k,k}^2 &= \Sigma K_{1,k}^2 \\ \dots & \dots \\ h_{1,n}^2 + h_{2,n}^2 + h_{3,n}^2 + \dots + h_{k,n}^2 + \dots + h_{n,n}^2 &= \Sigma K_{1,n}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{1,1} h_{1,2} &= \Sigma K_{t,1} K_{t,2} \\
 h_{1,2} h_{1,3} + h_{2,2} h_{2,3} &= \Sigma K_{t,2} K_{t,3} \\
 h_{1,3} h_{1,4} + h_{2,3} h_{2,4} + h_{3,3} h_{3,4} &= \Sigma K_{t,3} K_{t,4} \\
 &\dots \\
 h_{1,n-1} h_{1,n} + h_{2,n-1} h_{2,n} + h_{3,n-1} h_{3,n} + \dots + h_{n-1,n-1} h_{n-1,n} &= \Sigma K_{t,n-1} K_{t,n} \\
 &\dots \\
 h_{1,1} h_{1,2} &= \Sigma K_{t,1} K_{t,2} \\
 h_{1,2} h_{1,3} + h_{2,2} h_{2,3} &= \Sigma K_{t,2} K_{t,3} \\
 h_{1,3} h_{1,4} + h_{2,3} h_{2,4} + h_{3,3} h_{3,4} &= \Sigma K_{t,3} K_{t,4} \\
 &\dots \\
 h_{1,n-2} h_{1,n-1} + h_{2,n-2} h_{2,n-1} + h_{3,n-2} h_{3,n-1} + \dots + h_{n-2,n-2} h_{n-2,n-1} &= \Sigma K_{t,n-2} K_{t,n} \\
 &\dots \\
 h_{1,1} h_{1,n-2} &= \Sigma K_{t,1} K_{t,n-2} \\
 h_{1,2} h_{1,n-1} + h_{2,2} h_{2,n-1} &= \Sigma K_{t,2} K_{t,n-1} \\
 h_{1,3} h_{1,n} + h_{2,3} h_{2,n} + h_{3,3} h_{3,n} &= \Sigma K_{t,3} K_{t,n} \\
 &\dots \\
 h_{1,1} h_{1,n-1} &= \Sigma K_{t,1} K_{t,n-1} \\
 h_{1,2} h_{1,n} &= \Sigma K_{t,2} K_{t,n} \\
 &\dots \\
 h_{1,1} h_{1,n} &= \Sigma K_{t,1} K_{t,n}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Въ первую группу входятъ всё h безъ исключения и число ихъ есть $\frac{n(n+1)}{2}$, также какъ и число уравненій во всѣхъ группахъ. Для n различныхъ t имѣемъ n уравненій:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= h_{1,1} t_1 \\
 \rho_2 &= h_{1,2} t_1 + h_{2,2} t_2 \\
 \rho_3 &= h_{1,3} t_1 + h_{2,3} t_2 + h_{3,3} t_3 \\
 &\dots \\
 \rho_k &= h_{1,k} t_1 + h_{2,k} t_2 + \dots + h_{k,k} t_k \\
 &\dots \\
 \rho_n &= h_{1,n} t_1 + h_{2,n} t_2 + h_{3,n} t_3 + \dots + h_{n,n} t_n
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

§ 43.

Такимъ образомъ выраженіе вѣроятности p принимаетъ видъ:

$$p = \frac{1}{\pi^n} \iiint \dots \int d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_n \int \int \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S^n(y_k^2 + t_k^2)} (1 - iZ_1 + Z_1 - \dots) dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

Что касается до входящих сюда функций Z_2, Z_4 и т. д. то они отъ подстановка вместо z_1, z_2, \dots, z_n ихъ выражений въ функции y_k и t_k обращаются сами въ функции этихъ новыхъ переменныхъ. Функция Z_2 будетъ содержать вообще произведенія тринаго порядка, составленныя, какъ изъ различныхъ y_k , такъ и изъ обихъ переменныхъ вместе; лишними будутъ только тѣ члены, въ которыхъ входятъ нечетныя степени t_k и слѣд. четныя порядки y_k ; такъ что въ функции iZ_2 лишними будутъ на оборотъ члены содержащіе произведенія нечетнаго порядка относительно y_k и четнаго относительно t_k . Въ составъ функций Z_4 будутъ входить первыя четыре степени переменныхъ y_k и t_k въ видѣ однородныхъ членовъ четвертаго порядка; лишние члены будутъ нечетнаго порядка относительно каждаго изъ переменныхъ. Подобныя же замѣчанія должно сдѣлать о прочихъ членахъ разложенія.

Приступая къ интегрированію, должно прежде всего выразить чрезъ новыя переменныя дифференціальныя произведенія $d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_n$ и $dz_1 dz_2 \dots dz_n$. Такъ какъ переменныя $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, z_1, z_2, \dots, z_n$ независимы между собою, то ихъ дифференціалы должны быть по общимъ правиламъ вычисляемы въ предположеніи всѣхъ прочихъ дифференціаловъ равными нулю. Основываясь на этомъ, изъ уравненій (6), полагая $d\rho_1 = 0, d\rho_2 = 0, d\rho_3 = 0, \dots, d\rho_{k-1} = 0$, находимъ вообще $dt_1 = 0, dt_2 = 0, \dots, dt_{k-1} = 0$, такъ что

$$d\rho_k = h_{k,k} dt_k$$

и слѣд.

$$d\rho_1 d\rho_2 \dots d\rho_n = h_{1,1} h_{2,2} \dots h_{n,n} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Точка такимъ же образомъ изъ уравненій (5) найдемъ

$$dy_1 dy_2 \dots dy_n = h_{1,1} h_{2,2} \dots h_{n,n} dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

Вслѣдствіе этихъ равенствъ выраженіе p обращается въ

$$p = \frac{1}{\pi^n} \iiint dt_1 dt_2 \dots dt_n \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-S^2_1(y_k^2 + t_k^2)} [1 - iZ_2 + Z_4 - \dots] dy_1 dy_2 \dots dy_n,$$

или по раздѣленіи переменныхъ:

$$p = \frac{1}{\pi^n} \iiint e^{-t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_n^2} dt_1 dt_2 \dots dt_n \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2} [1 - iZ_2 + Z_4 - \dots] dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

§ 44.

Интегралъ перваго члена во второмъ интегралѣ находится прямо:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2} dy_1 dy_2 \dots dy_n = (\sqrt{\pi})^n$$

Интегрирование прочих членов, содержащих целыя и положительныя степени y , также всегда возможно въ конечномъ видѣ: оно приводится къ известнымъ интеграламъ вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^m e^{-y^2} dy.$$

Такъ какъ при нечетномъ m такіе интегралы обращаются въ нуль, то, на основаніи сказаннаго выше о составѣ функций iZ_3, Z_4, \dots , въ выраженіи p исчезаютъ всѣ мнныя члены; поэтому интегралъ содержащій функцию iZ_3 обращается въ сумму членовъ 3-й и 1-й степени относительно i ; интегралъ содержащій Z_4 —въ функцию того же переменнаго но выше четвертой степени и т. д. Означая эти функции черезъ T_3, T_4 и т. д. получимъ:

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \iiint e^{-i^2 - i_2^2 - \dots - i_n^2} (1 + T_3 + T_4 + \dots) dt_1 dt_2 \dots dt_n;$$

пределы многократнаго интеграла данныя первоначально должны быть очевидно преобразованы сообразно съ выраженіемъ предѣловъ r_1, r_2, \dots, r_n погрѣшностей $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ въ функции переменныхъ t_1, t_2, \dots, t_n . Не останавливаясь на выводѣ этихъ выраженій мы можемъ видѣть, что назначенныя въ началѣ противоположнымъ предѣламъ $\pm r_1, \pm r_2, \dots, \pm r_n$ будутъ соответствовать въ послѣднемъ выраженіи p также противоположные, но равныя по числовой величинѣ, предѣлы относительно переменныхъ t_1, t_2, \dots, t_n . Въ самомъ дѣлѣ, величины t (ур. 6. § 42) выражаются черезъ p линейными функциями безъ постоянныхъ членовъ и потому мѣняютъ только знакъ, когда переменныя знаки при всѣхъ r , величины же p должны переменять знаки выстѣ съ r_1, r_2, \dots, r_n , когда наблюденія освобождены отъ постоянныхъ погрѣшностей, т. е. когда $\mu_1 = 0$; и слѣдовательно въ этомъ случаѣ отъ перемены знака при всѣхъ величинахъ r_1, r_2, \dots, r_n количества t_1, t_2, \dots, t_n сдѣлаются также обратными, не измѣняясь въ числовой величинѣ. Въ томъ же случаѣ, когда μ_1 не равно нулю, мы можемъ сказать тоже самое, если за предѣлы погрѣшностей примемъ величины

$$\pm \left(r_k - \mu_1 \sum K_{i,k} \right),$$

какъ это видно изъ ур. (4) (§ 41) т. е. если освободимъ вѣроятныя погрѣшности r_k отъ вліянія на нихъ постоянныхъ погрѣшностей. Между противоположными предѣлами исчезнутъ въ выраженіи p всѣ члены, которые подъ знакомъ интеграла представляются въ видѣ нечетныхъ функций; такъ совершенно уничтожится интегралъ, зависящій отъ T_3 , потому что, какъ мы видѣли, въ T_3 входятъ только 1-я и 3-я степени переменныхъ; тоже самое будетъ съ T_5, T_7, \dots . Остальныя функции T_4, T_6, \dots останутся и аналитическое изслѣдованіе вопроса, веденное до сихъ поръ съ полною строгостію, приводитъ насъ къ интегрированію безконечнаго ряда весьма сложныхъ выраженій.

§ 45.

Задача упрощается въ предположеніи очень большаго числа наблюденій; въ этомъ условіи члены T_4, T_6, \dots становятся чрезвычайно малыми и ихъ можно откинуть; тогда мы получимъ просто:

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \iiint \dots e^{-t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_n^2} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Чтобы убедиться въ незначительности величинъ $T_1, T_2 \dots$ и вообще T_m , прослѣдимъ постепенное образование этихъ функций. Количество N_m (§ 40) состоитъ изъ членовъ m -го порядка относительно z ; коэффициенты этихъ членовъ суть суммы содержащія s членовъ и функция N_m будетъ вообще порядка sK^m , гдѣ K^m означаетъ среднюю величину m ыхъ степеней и произведеній m -го порядка коэффициентовъ $K_{i,l}$. Переходъ отъ переменныхъ α къ z не измѣняетъ порядка N_m . Коэффициенты h , какъ видно изъ уравненій (5) (§ 42), должны быть отнесены къ порядку $K\sqrt{s}$; при опредѣленіи z въ функцияхъ u и l эти самыя h будутъ въ знаменателяхъ входить однимъ порядкомъ больше нежели въ числителяхъ; слѣд. коэффициенты при u и l въ выраженіяхъ z будутъ порядка $\frac{1}{K\sqrt{s}}$, а потому Z_m и T_m порядка $\frac{sK^m}{(K\sqrt{s})^m} m!$ е. $\frac{1}{s^{\frac{1}{2}m-1}}$; такимъ образомъ функции $T_1, T_2 \dots$ относятся къ порядкамъ $\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2} \dots$ и потому при большомъ s могутъ быть пренебрегаемы. Кромѣ того число членовъ составляющихъ N_m пропорціонально числу n и потому при большомъ n должно считать $T_1, T_2 \dots$ количествами порядковъ $\frac{n}{s}, \frac{n}{s^2} \dots$; изъ этого мы должны заключить, что при опущеніи членовъ $T_1, T_2 \dots$ степень приближенія анализа ослабѣваетъ съ возрастаніемъ числа искомыхъ количествъ, что впрочемъ поватно само собою.

§ 46.

Остается интегрировать рядъ функций

$$\int_a^{+a} e^{-t^2} dt$$

между данными предѣлами. Но такъ какъ подобныя интегралы не могутъ быть найдены въ конечномъ видѣ, то для изысканія наилучшихъ коэффициентовъ $K_{i,k}$ удобнѣе представить вопросъ нѣсколько иначе. Не назначая впередъ предѣловъ $\pm r_1, \pm r_2 \dots \pm r_n$, можно подчинить переменныя $t_1, t_2 \dots t_n$ какому нибудь аналитическому условию опредѣляя потомъ вѣроятность p сообразно съ этимъ условіемъ, найдемъ наибольшія возможныя величины для $r_1, r_2, \dots r_n$; онѣ будутъ зависеть отъ $K_{i,k}$ и укажутъ на самый выгодный выборъ этихъ коэффициентовъ.

Для простоты рѣшенія удобнѣе всего предположить, что $S_1^n t_k^2 = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2$ не превосходитъ данного предѣла γ^2 ; такое предположеніе не отнимаетъ отъ вопроса его общности, потому что, какіе бы предѣлы не были назначены для r , всегда существуетъ и предѣлъ γ^2 ; между тѣмъ интегрированіе въ этомъ случаѣ оказывается довольно простымъ.

§ 47.

Разсмотрим прежде всего каковы наибольшия возможные значения переменных $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_n$ и слѣд. зависящихъ отъ нихъ предѣловъ погрѣшностей $r_1, r_2 \dots r_n$, когда переменныя $t_1, t_2 \dots t_n$ подчинены условию

$$t_1^2 + t_2^2 \dots + t_n^2 < \gamma^2$$

Изъ уравненій (6) (§ 42) имѣемъ

$$\rho_k = h_{1,k} t_1 = h_{2,k} t_2 + \dots + h_{l,k} t_l + \dots + h_{k,k} t_k$$

и величина ρ_k не зависитъ отъ остальныхъ переменныхъ $t_{k+1} \dots t_n$. Предположимъ, что $t_1, t_2 \dots t_k$ должны удовлетворять уравненію

$$v_k = t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_l^2 + \dots + t_k^2 = c^2,$$

гдѣ c есть постоянная величина; тогда условия наибольшей величины ρ_k будутъ:

$$\left(\frac{d\rho_k}{dt_1} \right) + \lambda \left(\frac{dv_k}{dt_1} \right) = 0; \left(\frac{d\rho_k}{dt_2} \right) + \lambda \left(\frac{dv_k}{dt_2} \right) = 0; \dots \left(\frac{d\rho_k}{dt_k} \right) + \lambda \left(\frac{dv_k}{dt_k} \right) = 0,$$

гдѣ λ есть произвольный коэффициентъ; исключая его, имѣемъ

$$\left(\frac{d\rho_k}{dt_1} \right) : \left(\frac{dv_k}{dt_1} \right) = \left(\frac{d\rho_k}{dt_2} \right) : \left(\frac{dv_k}{dt_2} \right) = \dots = \left(\frac{d\rho_k}{dt_k} \right) : \left(\frac{dv_k}{dt_k} \right)$$

т. е.

$$\frac{h_{1,k}}{t_1} = \frac{h_{2,k}}{t_2} = \dots = \frac{h_{k,k}}{t_k} = \pm \frac{\sqrt{h_{1,k}^2 + h_{2,k}^2 + \dots + h_{k,k}^2}}{c}.$$

Но § 42)

$$h_{1,k}^2 + h_{2,k}^2 + \dots + h_{l,k}^2 + \dots + h_{k,k}^2 = \Sigma K_{i,k}^2$$

слѣд.

$$\frac{h_{1,k}}{t_1} = \frac{h_{2,k}}{t_2} = \dots = \frac{h_{k,k}}{t_k} = \pm c \sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$$

Опредѣляя отсюда величины $t_1, t_2 \dots t_k$ и подставляя ихъ въ выраженіе ρ_k , найдемъ наибольшую величину

$$R_k = \pm \frac{c}{\sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}} \left[h_{1,k}^2 + h_{2,k}^2 + \dots + h_{k,k}^2 \right] = \pm c \sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$$

Количество $c \sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$ есть наибольшая числовая величина ρ_k ; двойной знакъ показываетъ что она будетъ наибольшая или наименьшая, смотря потому будетъ ли взято c съ положительнымъ или съ отрицательнымъ знакомъ. Постоянная величина c была взята произвольно

и R_k выходитъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе c ; но очевидно что наибольшая возможная величина c , согласная съ предположеніемъ

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 < \gamma^2$$

есть γ ; слѣдовательно наибольшіе возможные предѣлы для R_k суть

$$R_k = \pm \gamma \sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$$

т. е. для различныхъ R_k предѣлами будутъ величины:

$$R_1 = \pm \gamma \sqrt{\Sigma K_{i,1}^2}$$

$$R_2 = \pm \gamma \sqrt{\Sigma K_{i,2}^2}$$

.....

$$R_n = \pm \gamma \sqrt{\Sigma K_{i,n}^2}$$

Помощію этихъ величинъ уже нетрудно выразить предѣлы для погрѣшностей неизвѣстныхъ $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, соответствующіе данной вѣроятности, т. е. данной величинѣ γ , изъ уравненій вида

$$r_k = \mu_1 \Sigma K_{i,k} + R_k \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}$$

Изъ выраженій R_k мы видимъ, что предѣлы погрѣшностей для всякой вѣроятности пропорциональны множителямъ $\sqrt{\Sigma K_{i,k}^2}$ и слѣдовательно они будутъ тѣмъ тѣснѣе и опредѣленія неизвѣстныхъ тѣмъ благонадежнѣе, чѣмъ менше $\Sigma K_{i,k}^2$: такимъ образомъ для невыгоднѣйшихъ результатовъ суммы $\Sigma K_{i,k}^2$ должны имѣть наименьшія величины. При изложеніи общей теории Гаусса во второй главѣ мы доказали, что этому условію удовлетворяютъ коэффициенты $L_{i,k}$, соответствующіе способу наименьшихъ квадратовъ.

§ 48.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію вѣроятности, соответствующей данной величинѣ c , т. е. къ интегрированію выраженія

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \iiint e^{-t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_n^2} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

въ предположеніи, что $t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 < \gamma^2$. Если начнемъ интегрировать съ переменн.ой t_n , то предѣлы $\pm t'_n$, согласные съ предположеніемъ, должны быть выведены изъ уравненія

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n'^2 = \gamma^2;$$

откуда

$$t'_n = \pm \sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-1}^2}$$

послѣ этого нужно будетъ интегрировать относительно t_{n-1} функцию величины $\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-1}^2$; эта величина также какъ и $\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_n^2$, измѣняется между возможными предѣлами 0 и γ^2 ; слѣдовательно предѣлы для t_{n-1} должны быть выведены изъ уравненія

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_{n-1}^2 = \gamma^2,$$

они будутъ

$$\pm \sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-2}^2};$$

подобнымъ же образомъ предѣлы вообще для переменной t_k будутъ:

$$\pm \sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{k-1}^2}$$

Функции подъ знаками интеграловъ всегда останутся четными, слѣдовательно вмѣсто противоположныхъ предѣловъ можно взять интегралы отъ нуля до положительной величины предѣла, удвоивъ каждый разъ результаты. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$p = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^n \iiint \dots e^{-t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_k^2 - \dots - t_n^2} dt_1 dt_2 \dots dt_k \dots dt_n$$

гдѣ интегралы распространяются вообще отъ $t = 0$ до $t_k = \sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{k-1}^2}$

§ 49.

Введемъ вмѣсто t_n новое переменное u , определяемое помощью уравненія:

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_{n-1}^2 + t_n^2 = u^2,$$

откуда

$$t_n dt_n = u du, \quad t_n = \sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-1}^2}$$

Предѣлы относительно u , соответствующіе предѣламъ t_n , будутъ 0 и γ ; слѣдовательно

$$p = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int_0^\gamma e^{-u^2} u du \iiint \frac{dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-1}^2}}$$

Втоящій сюда многократный интегралъ приводится очень просто помощью уравненія (§ 5)

$$\int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy = \frac{\Gamma p \cdot \Gamma q}{\Gamma(p+q)},$$

Подставляя $y = \frac{t^2}{a^2}$ и $dy = 2 \frac{t dt}{a^2}$, получаемъ

$$\int_0^a t^{2p-1} (a^2 - t^2)^{q-1} dt = a^{2(p+q-1)} \cdot \frac{\Gamma p \cdot \Gamma q}{2 \Gamma(p+q)},$$

эта формула примениется очевидно къ интегралу:

$$U = \iiint \dots \frac{dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}}{\sqrt{a^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-1}^2}},$$

если положить въ ней $2p - 1 = 0$, т. е. $p = \frac{1}{2}$, отчего она обращается въ

$$\int_0^a (a^2 - t^2)^{q-1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{2q-1} \cdot \frac{\Gamma q}{\Gamma(q + \frac{1}{2})}.$$

Чтобы взять въ и интегралъ относительно t_{n-1} , должно положить $a^2 = u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-2}^2$ и $q - 1 = -\frac{1}{2}$, т. е. $q = \frac{1}{2}$, отчего получимъ

$$U = \iiint \dots dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2} \int_0^a \frac{dt_{n-1}}{\sqrt{a^2 - t_{n-1}^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma 1} \iiint \dots dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2};$$

это очевидно согласно съ результатомъ непосредственнаго интегрированія относительно t_{n-1} . Прилагая формулу второй разъ, сделаемъ $a^2 = u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-2}^2$; $q - 1 = 0$, т. е. $q = 1$, тогда будетъ:

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma 1} \iiint dt_1 \dots dt_{n-2} \int_0^a dt_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma 1} \cdot \frac{\Gamma 1}{\Gamma \frac{3}{2}} \iiint dt_1 \dots dt_{n-2} \sqrt{u^2 - t_1^2 - \dots - t_{n-2}^2}$$

Для интегрированія по t_{n-2} имѣемъ $a^2 = u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-2}^2$; $q - 1 = \frac{1}{2}$; $q = \frac{3}{2}$, и

$$U = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma 1} \cdot \frac{\Gamma 1}{\Gamma \frac{3}{2}} \cdot \frac{\Gamma \frac{3}{2}}{\Gamma 2} \iiint dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2} (u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-2}^2)$$

Положивъ далѣе $a^2 = u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-2}^2$ и $q - 1 = 1$, т. е. $q = 2$ получаемъ:

$$U = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^k \cdot \frac{\Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma 1} \cdot \frac{\Gamma 1}{\Gamma \frac{3}{2}} \cdot \frac{\Gamma \frac{3}{2}}{\Gamma 2} \cdot \frac{\Gamma 2}{\Gamma \frac{5}{2}} \iiint \dots dt_1 dt_2 \dots dt_{n-k} \left(u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

И продолжая такимъ образомъ будемъ получать вообще при всякомъ k

$$U = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{\Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma 1} \cdot \frac{\Gamma 1}{\Gamma \frac{3}{2}} \cdot \frac{\Gamma \frac{3}{2}}{\Gamma 2} \cdot \frac{\Gamma \frac{k-1}{2}}{\Gamma \frac{k}{2}} \iiint \dots dt_1 dt_2 \dots dt_{n-k} \left(u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \dots - t_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}-1}$$

При $k = n$ освободимся совершенно отъ знака интеграла и такъ какъ въ этомъ случаѣ $n^2 = n^2$, то сокращая функціи Γ въ числителяхъ и знаменателяхъ послѣдующихъ дробей, мы получимъ окончательно

$$U = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-1} \cdot u^{n-2} \cdot \frac{\Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma \frac{n}{2}} = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n \frac{u^{n-2}}{\Gamma \frac{n}{2}}$$

Вставляя это выраженіе въ p имѣемъ

$$p = \frac{2}{\Gamma \frac{n}{2}} \int_0^\gamma u^{n-1} e^{-u^2} du$$

При цѣлыхъ и положительныхъ величинахъ n этотъ интегралъ чрезъ разложеніе по частямъ

приводится къ $\int_0^\gamma e^{-u^2} du$, когда n нечетное и обращается въ сумму конечныхъ членовъ когда

n четное. Дѣйствительно, если, переимѣня u^2 на z , означимъ

$$\int_0^\gamma u^{n-1} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{\gamma^2} z^{\frac{1}{2}(n-2)} e^{-z} dz$$

и разложимъ послѣдній интегралъ по частямъ:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\gamma^2} z^{\frac{1}{2}(n-2)} e^{-z} dz = -\gamma^{n-2} \cdot \frac{e^{-\gamma^2}}{2} + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\gamma^2} z^{\frac{1}{2}(n-2)} e^{-z} dz,$$

то получим чрез дальнейшее последовательное разложение вообще:

$$\int_0^{\gamma} u^{n-1} e^{-u^2} du =$$

$$-\frac{e^{-\gamma^2}}{2} \left[\gamma + \frac{n-2}{2} \gamma + \dots + \frac{n-2}{2} \frac{n-4}{2} \dots \frac{n-2i}{2} \gamma^{n-2i-1} \right] + \frac{n-2}{2} \dots \frac{n-2i-2}{2} \int_0^{\gamma} u^{n-2i-3} e^{-u^2} du$$

Когда n четное, то полагая $n=2m$ и простирая разложение до $i=m-2$, дойдем до интеграла

$$\int_0^{\gamma} u e^{-u^2} du = \frac{1}{2} (1 - e^{-\gamma^2})$$

и слѣд.

$$\int_0^{\gamma} u^{2m-1} e^{-u^2} du =$$

$$-\frac{e^{-\gamma^2}}{2} \left[\gamma^{2m-2} + \frac{2m-2}{2} \gamma^{2m-4} + \dots + \frac{2m-2}{2} \cdot \frac{2m-4}{2} \dots \frac{2}{2} \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2} \dots \frac{2m-4}{2} \cdot \frac{2m-2}{2}$$

Для нечетнаго же $n=2m+1$, простирая разложение до $i=m-1$, приходимъ къ неприводимому интегралу $\int_0^{\gamma} e^{-u^2} du$ и получаемъ

$$\int_0^{\gamma} u^{2m} e^{-u^2} du =$$

$$-\frac{e^{-\gamma^2}}{2} \left[\gamma^{2m-1} + \frac{2m-1}{2} \gamma^{2m-3} + \dots + \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{2m-3}{2} \dots \frac{3}{2} \gamma \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2m-1}{2} \int_0^{\gamma} e^{-u^2} du$$

Введемъ въ эти выраженія для сокращенія функція Γ ; тогда на основаніи уравненія

$$\Gamma a = (a-1) \Gamma (a-1)$$

найдемъ:

$$\int_0^{\gamma} 2m-1 e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \Gamma(m) \left[1 - e^{-\gamma^2} \left(\frac{\gamma^{2(m-1)}}{\Gamma(m)} + \frac{\gamma^{2(m-2)}}{\Gamma(m-1)} + \frac{\gamma^{2(m-3)}}{\Gamma(m-2)} + \dots + \frac{\gamma^2}{\Gamma(2)} + 1 \right) \right]$$

$$\int_0^{\gamma} 2me^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) \int_0^{\gamma} e^{-u^2} du - e^{-\gamma^2} \left[\frac{\gamma^{2m-1}}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2m-2}}{\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)} + \dots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right]$$

Вставимъ эти выраженія въ величину p ; означая черезъ p_{2m} и p_{2m+1} вѣроятности соответствующія четному и нечетному числу наблюдений, получимъ:

$$p_{2m} = 1 - e^{-\gamma^2} \left[\frac{\gamma^{2(m-1)}}{\Gamma(m)} + \frac{\gamma^{2(m-2)}}{\Gamma(m-1)} + \dots + \frac{\gamma}{\Gamma(2)} + 1 \right]$$

$$p_{2m+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-u^2} du - e^{-\gamma^2} \left[\frac{\gamma^{2m-1}}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2m-2}}{\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)} + \dots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right]$$

Прежде подстановки мы убѣждаемся также, что производная $\frac{dp}{d\gamma}$ есть

$$\frac{dp}{d\gamma} = 2e^{-\gamma^2} \frac{\gamma^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Для положительныхъ величинъ γ эта производная сама всегда положительная, слѣд вѣроятности p_{2m} и p_{2m+1} возрастаютъ въ одно время съ γ . Выраженія вѣроятностей зависятъ отъ числа неизвѣстныхъ $2m$ или $2m+1$ и при одинаковыхъ величинахъ γ вѣроятность становится тѣмъ меньше, чѣмъ больше число неизвѣстныхъ; при томъ выраженія вѣроятностей для четнаго и нечетнаго числа наблюдений совершенно различны.

§ 51.

Если опредѣлимъ такую величину γ , для которой соответствующая вѣроятность равна половинѣ и назовемъ ее черезъ γ' , то количества

$$r_k = \mu_k \Sigma L_{i,k} + R_k \sqrt{2(\mu_k - \mu_k^2)}$$

или при $\mu_k = 0$

$$r_k = R_k \sqrt{2\mu_k^2}$$

т. е. величины

$$r_k = \pm \gamma' \sqrt{2\mu_k} \sqrt{\Sigma L_{i,k}^2} = \pm \gamma' \sqrt{2} \frac{m}{\sqrt{P_k}}$$

где P_k есть весь результата ξ_k , будут вероятны погрешности неизвестных x_k , определенных по способу наименьших квадратов. Величины γ' будут различны для различного числа неизвестных: в случае одной неизвестной γ'_1 найдется из уравнения

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'_1} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}$$

и будет, как мы замечали выше, равна 0,47694; при двух неизвестных γ'_2 должно определить из уравнения

$$1 - e^{-\gamma'^2_2} = \frac{1}{2}$$

откуда $\gamma'_2 = \sqrt{\lg 2} = 0,83255$, т. е. вероятные пределы погрешностей почти вдвое больше, нежели при одной неизвестной. Вычисляя таким образом величины γ' , в предположении P_m и P_{2m} , равных половин, для различного числа неизвестных, Бьенеме нашел:

$n = 1$	$\gamma'_1 = 0,47694$
$n = 2$	$\gamma'_2 = 0,83255 = 1,7456 \gamma'_1$
$n = 3$	$\gamma'_3 = 1,0876 = 2,2814 \gamma'_1$
$n = 4$	$\gamma'_4 = 1,29551 = 2,7164 \gamma'_1$
$n = 5$	$\gamma'_5 = 1,4750 = 3,0927 \gamma'_1$
$n = 6$	$\gamma'_6 = 1,63525 = 3,4287 \gamma'_1$
$n = 7$	$\gamma'_7 = 1,7812 = 3,7347 \gamma'_1$
$n = 8$	$\gamma'_8 = 1,91623 = 4,0178 \gamma'_1$
.....	

так что при пяти неизвестных пределы погрешностей слишком втрое, а при восьми слишком вчетверо больше обыкновенно принимаемых.

Величиною вероятной ошибки вывода определяется его точность и потому знание вероятной ошибки есть одна из самых важных задач теории невыгоднейших результатов; замена всех различных величин γ'_n одною величиною γ'_1 , как это делается обыкновенно приводит к совершенно неправильным заключениям о степени точности результатов; чтобы получить истинные величины вероятных погрешностей необходимо употреблять множители γ'_n , соответствующие числу определяемых неизвестных. Величины вставь и средней ошибки наблюдений, как видно из последнего выражений r_k , остаются также, как и в прежних теориях; поэтому исправление найденных на обыкновенном способе вероятных ошибок должно состоять просто в помножении их на вычисленные выше коэффициенты при γ'_n , употребляя тот из них, который относится к существующему в задаче числу неизвестных.

§ 52.

Сображая все изложенное выше, мы приходим к тому убеждению, что значение способа наименьших квадратов совершенно зависит от тех обстоятельств, при которых

онъ прилагается къ рѣшенію практическихъ вопросовъ. Первымъ условіемъ для того, чтобы употребленіе этого способа было согласно съ своею цѣлю, должно считать по возможности полное исключеніе постоянныхъ погрѣшностей, особенно если въ расчетъ берутся наблюденія, произведенныя помощью разнообразныхъ способовъ и инструментовъ. Когда число наблюдений выполняющихъ это условіе очень велико и достоинства ихъ опредѣлены довольно точно, результаты способа наименьшихъ квадратовъ съ чрезвычайно большою вѣроятностію будутъ очень мало разниться отъ истинныхъ значеній искомымъ количествъ и вліяніе случайныхъ ошибокъ будетъ устранено. Если же число наблюдений менѣе значительно, то данныя предѣлы погрѣшностей имѣютъ не слишкомъ большую вѣроятность и кромѣ того самыя выраженія вѣроятностей перестаютъ быть точными отъ вліянія отбрасываемыхъ членовъ; вообще, когда число наблюдений не слишкомъ мало, выводы теоріи остаются достаточно справедливыми, что бы на нихъ полагаться при рѣшеніи практическихъ вопросовъ; къ такому случаю относится большая часть задачъ Астрономіи и Геодезіи, для которыхъ способъ наименьшихъ квадратовъ есть не только средство прѣстѣйшаго сочетанія многочисленныхъ данныхъ, но также средство для полученія болѣе близкихъ къ истинѣ результатовъ. Наконецъ примѣненіе этого способа къ весьма небольшому числу данныхъ есть не болѣе какъ распространеніе по аналогіи на малое число наблюдений того приема, который можетъ быть доказаннымъ и справедливымъ только для большихъ чиселъ; въ этомъ случаѣ всѣ тѣ положенія, которыя служатъ точкою исхода анализу случайныхъ явленій, перестаютъ имѣть какое либо значеніе, а слѣдовательно и выводы изъ нихъ теряютъ всякую достовѣрность и становятся произвольными, сохраняя, само собою разумѣется, характеръ среднихъ величинъ.

ГЛАВА IV.

Приложение способа наименьших квадратов къ вычисленію поправокъ элементовъ кометы Донати
1858 года.

§ 53.

Въ дополненіе къ теоріи, изложенной выше, рассмотримъ въ этой послѣдней главѣ главнѣйшіе приемы, употребляемые при практическихъ приложенияхъ способа наименьшихъ квадратовъ; знаніе этихъ приемовъ необходимо при числовыхъ вычисленіяхъ для того, чтобы избѣгать излишняго труда и чтобы постоянно имѣть поправки для убѣжденія въ отсутствіи ошибокъ.

Приложеніе способа наименьшихъ квадратовъ къ уравненіямъ уже приведеннымъ въ линейный видъ состоитъ изъ вычисленій въ общихъ чертахъ совершенно одинаковыхъ для большей части случаевъ; единственно важную особенность въ этомъ отношеніи представляетъ тотъ случай, когда неизвѣстныя, сверхъ уравненій данныхъ изъ наблюденій, должны удовлетворять въ точности нѣкоторымъ другимъ условіямъ; въ задачахъ Геодезіи къ такимъ условіямъ принадлежатъ напр. геометрическія соотношенія между частями треугольниковъ, входящихъ въ сѣть триангуляціи. Исслѣдованію задачъ подобнаго рода посвящено дополненіе къ мемуарамъ Гаусса; на русскомъ языкѣ мы имѣемъ полную теорію вычисленія геодезическихъ измѣреній въ спеціальнойнѣй руководствѣ Савича (*). Не останавливаясь на этой особенноти возьмемъ для примѣра задачу изъ области Астрономіи: опредѣлимъ поправки элементовъ блестящей кометы Донати, которая была видима у насъ въ теченіе всей осени 1858 года.

§ 54.

Чтобы избѣгать слишкомъ большихъ вычисленій возьмемъ 20 наблюденій надъ склоненіями и прямыми восхожденіями кометы; изъ множества сдѣланныхъ наблюденій изберемъ такіа, которыя по силѣ инструментовъ заслуживаютъ наибольшаго довѣрія и которыя при томъ обнимаютъ довольно большой промежутокъ времени, соответствующій значительной

(*) Приложение Теоріи Вѣроятностей къ вычисленію набл. и Геодез. измѣр. Сост. проф. Докторъ Савичъ. 1837.

дугъ орбиты. Эти наблюдёнія, заимствованныя изъ *Astronomische Nachrichten*, 1858 J. и сообщенныя Директоромъ Московской Обсерваторіи Б. Я. Швейцеромъ, суть слѣдующія:

№	ВРЕМЯ НАБЛЮДЕНІЯ	$\alpha \delta$		$\delta \delta$	
1	1858 г. Юна 16 въ 10 ^h 43 ^m 40. ^s 0	Среди. Берлин. вр.	141° 30' 35".2	+ 25° 17' 46".2	
2	— Августа 7 — 9 25 38. 0	Среди. Берлин. вр.	150 8 41 .6	30 27 27 .6	
3	— — 7 — 8 16 58. 8	Среди. Вашинг. вр.	10 ^h 0 ^m 48 ^s .29	30 28 56 .46	
4	— Сентября 2 — 11 54 48. 7	Среди. Пулков. вр.	10 41 48 .81	34 28 43 .2	
5	— — 2 — 9 37 34 . 2	Среди. Кенигс. вр.	160° 24' 41".8	34 27 53 .5	
6	— — 16 — 15 38 58. 4	Среди. Бониск. вр.	172 5 20. 8	36 26 41 5	
7	— — 16 — 11 45 7. 3	Среди. Пулков. вр.	11 ^h 27 ^m 17 ^s .50	36 26 12 .0	
8	— — 24 21 20 37.3	Звѣзд. Москов. вр.	12 14 30 .53	35 12 17 0	
9	— — 24 — 12 1 51. 3	Среди Пулков. вр.	12 15 36 .73	35 8 19 8	
10	— — 24 — 6 33 23. 9	Среди. Гринич. вр.	12 14 30 .93	35 12 20 .7	
11	— — 24 — 8 11 41 0	Среди Кенигсб. вр.	183° 38' 54".3	35 12 4 .8	
12	— Октября 3 7 8 46 1	Среди. Бониск. вр.	205 54 23 .7	24 35 23 .9	
13	— — 3 — 7 26 54. 4	Среди. Вашингт. вр.	13 ^h 46 ^m 34".46	24 2 42 .24	
14	— — 5 — 20 51 36. 5	Звѣзд. Москов. вр.	211° 50' 57".0	19 50 43 .0	
15	— — 5 — 6 56 27 7	Среди. Бониск. вр.	211 59 12".7	19 43 38 .5	
16	— — 5 — 7 6 13. 8	Среди. Пулков. вр.	14 ^h 7 ^m 14 ^s .10	19 52 55 9	
17	— — 5 — 6 26 14. 6	Среди Кенигс. вр.	211° 48' 22".3	+ 19 53 1 4	
18	— — 16 — 6 19 23. 4	Среди Геггинг. вр.	16 ^h 15 ^m 19 ^s .70	— 16 10 24 9	
19	— — 16 — 5 56 41. 6	Среди. Бониск. вр.	243° 49' 26".6	— 16 8 52 4	
20	— — 16 — 6 45 1 2	Среди. Вашинг. вр.	16 ^h 17 ^m 50 ^s .34	— 16 53 57 .76	

Здѣсь чрезъ $\alpha \delta$ и $\delta \delta$ означены прямыя восхожденія и склоненія кометы. Мы не пишемъ ни какихъ данныхъ для того, чтобы различить эти наблюдёнія относительно ихъ достоинства и потому припишемъ имъ одинаковый вѣсъ, который и приедемъ за единицу. Нѣкоторые изъ наблюдёній съ наибрѣею выбраны приблизительно для одинаковаго времени, чтобы имѣть возможность еще уменьшать число уравненій, какъ увидимъ впоследствии.

§ 55.

Неизвѣстныя величины въ нашемъ случаѣ суть 6 элементовъ эллиптическаго движенія кометы, опредѣляющіе вполнѣ положеніе плоскости орбиты, ея размыры и положеніе кометы для даннаго времени, въ томъ предположеніи, что масса кометы можетъ быть пренебрежена въ сравненіи съ массою солнца. Будемъ означать искомыя элементы слѣдующимъ образомъ:

Долготу восходящаго узла орбиты чрезъ Ω
 Наклоненіе орбиты къ эклиптикѣ. i

Долготу перихелия	Π
Среднее суточное движенье кометы	μ
Уголъ, синусъ котораго равенъ эксцентрицитету	φ
и среднюю долготу кометы въ орбитѣ для эпохи: именно для средняго Гриничскаго полдня 1-го Января 1858 года	N

Величины Ω , Π и зависящія отъ нихъ, отнесемъ къ среднему положенію эклиптики во время эпохи, т. е. къ среднему равноденствію 1858 года $0^h 0^m 0^s$ средн. Грин. вр.

Склоненія и правыя восхожденія, равно какъ и всякія другія координаты получаемыя изъ нихъ чрезъ преобразованіе, напр. широты и долготы в др., ны должны разсматривать какъ функціи элементовъ кометы и времени, слѣд. называя черезъ ξ_i и ζ_i погрѣшности наблюденій, мы имѣемъ вообще

$$\alpha_i + \xi_i = F(t_i, \Omega, i, \Pi \dots); \delta_i + \zeta_i = f(t_i, \Omega, i, \Pi \dots)$$

или для долготы λ_i и широты β_i съ ихъ погрѣшностями τ_i и ϑ_i

$$\lambda_i + \tau_i = \Phi(t_i, \Omega, i, \Pi \dots); \beta_i + \vartheta_i = \phi(t_i, \Omega, i, \Pi \dots)$$

Функціями F , f , Φ и ϕ выражаются тѣ соотношенія, которыя существуютъ между временемъ, элементами и координатами кометы вслѣдствіе законовъ эллиптическаго движенья и, если не принимаемъ въ расчетъ вліянія возмущеній, то только вслѣдствіе однихъ этихъ законовъ. Чтобы дать выраженія въ расчетъ вліянія возмущеній, то только вслѣдствіе однихъ этихъ законовъ. Чтобы дать выраженія въ расчетъ вліянія возмущеній, то только вслѣдствіе однихъ этихъ законовъ. Чтобы дать выраженія въ расчетъ вліянія возмущеній, то только вслѣдствіе однихъ этихъ законовъ. Чтобы дать выраженія въ расчетъ вліянія возмущеній, то только вслѣдствіе однихъ этихъ законовъ.

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 &= 165^\circ 18' 59.99 \\ i_0 &= 116 57 30.38^{(*)} \\ \Pi_0 &= 294 25 39 85 \\ \mu_0 &= 1''.954665 \\ \varphi_0 &= 84^\circ 56' 47''.27 \\ N_0 &= 294 16 46.30 \end{aligned} \right\} \text{Средн. равнод. 1858.0}$$

Съ помощію этихъ элементовъ легко найти слѣдующія величины для нѣкоторыхъ обстоятельствъ движенья кометы:

Большая полуось орбиты 148.80675 средн. разст. земли отъ солнца
Малая полуось 13.107873 — — — —

(*) Theoria motus corporum coelestium. Sect. IV.

(**) Движеніе кометы *обратное*; слѣдуя тѣмъ обозначеніямъ, при которыхъ различается прямое и обратное движеніе, выводимъ $i_0 = 63^\circ 2' 29''.62$; $\Pi_0 = 36^\circ 12' 20''.12$.

Эксцентриситетъ 0.9961127

Время прохода чрезъ перигелий 1858 г. 29 Сентября 23^h 6^m 53^s Ср. Гр. вр

Время полного обращенія 1815.24 звезд. года.

§ 56.

Положимъ

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$$

$$i = i_0 + \Delta i \text{ и пр.}$$

и вставимъ эти выраженія въ $\alpha_i + \xi_i$ и т. д. Разлагая по Тейлоровой теоремѣ и довольствуясь первыми степенями поправокъ $\Delta\Omega$, Δi и пр. мы получимъ 40 линейныхъ уравненій, изъ которыхъ 20 будутъ вида:

$$\alpha_i + \xi_i = \alpha_{0,i} + G_a \Delta\Omega + H_a \Delta i + \dots + Q_a \Delta\varphi,$$

или по долготѣ

$$\lambda_i + \eta_i = \lambda_{0,i} + A_i \Delta\Omega + B_i \Delta i + \dots + F_i \Delta\varphi$$

и 20 уравненій:

$$\delta_i + \zeta_i = \delta_{0,i} + G_d \Delta\Omega + H_d \Delta i + \dots + Q_d \Delta\varphi$$

или по широтѣ

$$\beta_i + \psi_i = \beta_{0,i} + A_b \Delta\Omega + B_b \Delta i + \dots + F_b \Delta\varphi,$$

гдѣ $\alpha_{0,i}$, $\lambda_{0,i}$, $\delta_{0,i}$ и $\beta_{0,i}$ суть величины $F(t_i, \Omega_0, i_0, \dots)$, $\Phi(t_i, \Omega_0, i_0, \dots)$, $f(t_i, \Omega_0, i_0, \dots)$, и $\phi(t_i, \Omega_0, i_0, \dots)$ т. е. координаты кометы, вычисленныя для времени t_i изъ приближенныхъ элементовъ, а чрезъ $G_a, H_a, \dots, G_d, H_d, \dots, A_i, B_i, \dots, A_b, B_b, \dots$ означены частныя первыя производныя соотвѣтствующихъ координатъ, вычисленныя такимъ же образомъ. Пользуясь правилами, изложенными въ *Theoria motus corporum coelestium* и получая для разностей:

$$\Delta\alpha_i = \alpha_{0,i} - \alpha_i \text{ и } \Delta\delta_i = \delta_{0,i} - \delta_i;$$

т. е. для уклоненій вычисленія отъ наблюденій слѣдующіи величины:

Время и № наблюд.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Іюня 16 — 1	— 0'.02	+ 0'.01
Авг. 7 {	2 + 0.17	— 0.18
	3 + 23.59	— 17.86
Сент. 2 {	4 + 11.86	— 5.70
	5 + 19.28	+ 1.03
Сент. 16 {	6 + 23.95	+ 2.53
	7 + 25.25	— 0.79

		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Сент. 24	8	+ 46'' .31	— 6'' .37
	9	+ 34 .31	— 3 .67
	10	+ 20 .51	— 4 .06
	11	+ 29 .11	— 7 .40
Окт. 3	12	+ 22 .92	— 23 .05
	13	+ 25 .44	— 16 .90
Окт. 5	14	+ 0 .03	— 0 .03
	15	+ 24 .16	— 23 .39
	16	+ 22 .43	— 22 .29
	17	+ 25 .15	— 21 .52
Окт. 16	18	+ 40 .54	— 8 .62
	19	— 5 .07	— 5 .26
	20	— 5 .56	— 15 .32

При вычислениях $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, также как и при всех последующих до решения окончательных уравнений, совершенно достаточно употребить пятизначные таблицы логарифмов.

В течение небольшого промежутка времени изменение координат можно считать без большой погрешности пропорциональным времени; пользуясь этим замечанием мы можем соединять наблюдения, относящиеся к одному и тому же дню по правилу арифметической среды; вследствие этого число уравнений в нашем случае уменьшится от 40 до 16. При этом мы должны приписать вновь полученным уравнениям α и δ во столько раз большие единицы, во сколько уравнений входит в каждую группу, соединяемую по правилу арифметической среды. Таким образом мы получим 8, так называемых, нормальных положений кометы:

№	Среднее Гривич. вр. отъ начала 1858 г.	α δ	δ δ	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\lambda$	$\Delta\beta$	Въсы
1	167. 3955 ср. сут.	141°30'.6	+25°17'.8	— 0'' .02	+ 0'' .01	0'' .02	+ 0' .068	1
2	219. 4451 — —	150 10 0	+30 28.3	+11 .88	— 9 .02	+13 .40	— 4 .71	2
3	245 3691 — —	160 25.2	+34 28.6	+15 .57	— 2 .33	+13 .84	+ 3 .16	2
4	259. 5122 — —	171 57.5	+36 26.8	+24 .60	+ 1 .74	+19 .44	+ 10 57	2
5	267. 3075 — —	183 41.4	+35 11.7	+32 .56	— 5 .37	+31 08	+ 7 94	4
6	276. 3977 — —	206 16.0	+24 19.6	+34 .18	—19 .97	+33 72	— 8 76	2
7	278. 2256 — —	211 51.3	+19 50.4	+17 94	—16 .80	+25 .70	— 8 82	4
8	289. 3163 — —	244 1.7	+16 23.6	+ 9 97	— 9 .73	+11 .16	— 7 .91	3

Линейные начальные уравнения мы вычислим относительно широты и долготы; для этой цели мы поместили величины разностей $\Delta\lambda_i = \lambda_{o,i} - \lambda_i$ и $\Delta\beta_i = \beta_{o,i} - \beta_i$. Числа здесь сокращены, потому что большей точности не нужно при вычислениях в пятизначных логарифмах.

§ 58.

Чтобы получить начальные уравнения, остается вычислить коэффициенты A_i, B_i, \dots и A_b, B_b, \dots и для приведения уравнений къ общей жѣрѣ точности помножить ихъ на квадратные корни изъ соответствующихъ вѣсовъ. Вычисленіе коэффициентовъ основывается на формулахъ эллиптическаго движенія (*Theoria motus corp. coel.*). Въ нашемъ случаѣ получаются слѣдующія 16 уравненій, во второй части которыхъ поставлены нули вѣсто неизвѣстныхъ случайныхъ погрѣшностей η_i и ξ_i .

а) относительно долготы

$$\begin{aligned} &+1.24444\Delta \Omega - 0.14836\Delta i - 430.80\Delta N - 72114\Delta \mu + 430.39\Delta H + 7.4578\Delta \varphi - 0.00000097 = 0 \\ &+1.20920\Delta \Omega - 0.39865\Delta i - 723.20\Delta N - 158704\Delta \mu + 722.70\Delta H + 10.6770\Delta \varphi + 0.000091872 = 0 \\ &+0.83064\Delta \Omega - 0.60681\Delta i - 678.22\Delta N - 166550\Delta \mu + 677.86\Delta H + 10.5102\Delta \varphi + 0.000095110 = 0 \\ &+0.19790\Delta \Omega - 0.80803\Delta i + 50.54\Delta N + 13117\Delta \mu - 49.62\Delta H + 8.9356\Delta \varphi + 0.000133290 = 0 \\ &-0.92534\Delta \Omega - 1.31500\Delta i + 2328.80\Delta N + 622508\Delta \mu - 2328.60\Delta H + 10.3950\Delta \varphi + 0.000301360 = 0 \\ &-2.24390\Delta \Omega - 0.79155\Delta i + 5634.29\Delta N + 1557250\Delta \mu - 5633.37\Delta H + 2.2125\Delta \varphi + 0.000232790 = 0 \\ &-3.40374\Delta \Omega - 0.95028\Delta i + 8896.60\Delta N + 2475336\Delta \mu - 8895.20\Delta H - 0.0174\Delta \varphi + 0.000249190 = 0 \\ &-0.74817\Delta \Omega - 0.02613\Delta i + 4785.11\Delta N + 1384410\Delta \mu - 4384.78\Delta H - 18.6613\Delta \varphi + 0.000093710 = 0 \end{aligned}$$

и б) относительно широты:

$$\begin{aligned} &-0.63775\Delta \Omega - 0.09807\Delta i + 294.26\Delta N + 49258\Delta \mu - 293.57\Delta H - 10.9570\Delta \varphi + 0.00000039 = 0 \\ &-0.63251\Delta \Omega - 0.25238\Delta i + 569.31\Delta N + 124931\Delta \mu - 668.66\Delta H - 14.1873\Delta \varphi - 0.000032292 = 0 \\ &-0.59156\Delta \Omega - 0.33779\Delta i + 789.06\Delta N + 193604\Delta \mu - 788.64\Delta H - 15.1007\Delta \varphi + 0.000021666 = 0 \\ &-0.57179\Delta \Omega - 0.36328\Delta i + 852.53\Delta N + 221355\Delta \mu - 852.20\Delta H - 16.9523\Delta \varphi + 0.000072402 = 0 \\ &-0.60804\Delta \Omega - 0.44442\Delta i + 701.68\Delta N + 187568\Delta \mu - 701.44\Delta H - 28.3980\Delta \varphi + 0.000076988 = 0 \\ &+0.55956\Delta \Omega - 0.12876\Delta i - 2082.86\Delta N - 575675\Delta \mu + 2082.29\Delta H - 29.9706\Delta \varphi - 0.000060060 = 0 \\ &+1.33058\Delta \Omega - 0.13724\Delta i - 4428.60\Delta N - 1232176\Delta \mu + 4427.40\Delta H - 46.3460\Delta \varphi - 0.000085520 = 0 \\ &+1.98900\Delta \Omega - 0.06188\Delta i - 7309.83\Delta N - 2114904\Delta \mu + 7307.67\Delta H - 42.6300\Delta \varphi - 0.000066420 = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты начальныхъ уравненій должны быть выражены въ одинакихъ единицахъ т. е. или въ секундахъ, или въ частяхъ радіуса; въ нашемъ случаѣ они, также какъ и постоянные члены, выражены въ частяхъ радіуса. (*) Окончательныя уравненія получатся изъ начальныхъ, если удовлетворишь условію, что сумма $\Sigma \eta^2 + \Sigma \xi^2$ должна имѣть наименьшую величину. По способу наименьшихъ квадратовъ коэффициенты окончательныхъ уравненій будутъ составлены изъ суммъ квадратовъ и произведеній коэффициентовъ начальныхъ уравненій; легко замѣтить, что, ограничивая по необходимости вычисленіе извѣстнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, мы не можемъ оставить полученныхъ коэффициентовъ въ такомъ видѣ; иначе квадраты и произведенія малыхъ коэффициентовъ совершенно исчезнутъ въ сравненіи съ большими и слѣдовательно вычисленіе не будетъ имѣть надлежащей точности; въ нашихъ

(*) Извѣстно, что переходъ отъ одной изъ этихъ единицъ къ другой произведется помощью множителя 206264.8, который означаетъ число секундъ въ дугѣ, равной диаметру радіуса. Логарифмъ этого числа есть 5.3144231 дополненіе его 4.6835749—10 есть $\lg \sin 1'' = \lg 1''$.

урр. напр. коэффициенты при Δz чрезвычайно велики въ сравненіи съ коэффициентами Δi и съ постоянными членами. Этого неудобства можно избѣгнуть, измѣняя неизвѣстныя на слѣдующихъ основаніяхъ. Если въ начальныхъ уравненіяхъ (§§ 27 и 28) мы вмѣсто неизвѣстной x_n примемъ $\frac{x_n}{k}$ и въ тоже время умножимъ на k все коэффициенты при этой неизвѣстной

то, слѣдя за порядкомъ исключенія, мы увидимъ, что величины всекъ другихъ неизвѣстныхъ и вѣсовъ ихъ вовсе не переижаются; для полученія же x_n нужно будетъ результатъ исключенія умножить на k , а полученный вѣсъ раздѣлить на k^2 . Введеніе множителя въ постоянный членъ не измѣняетъ вѣсовъ результатовъ, сами же результаты получаются умноженными на этого множителя. Распоряжаясь такимъ образомъ выборомъ множителей мы легко можемъ все коэффициенты слѣлауъ величинами не слишкомъ много различающимися между собою т. е. величинами, такъ сказать одного порядка. Такимъ образомъ въ нашемъ примѣрѣ коэффициенты будутъ очень удобны для вычисленія, если положить

$$\Delta \eta = \frac{1}{2} \Delta i; \Delta n = 2000 \Delta N; \Delta m = 1000000 \Delta \mu; \Delta p = 2000 \Delta M; \Delta \theta = 10 \Delta \varphi$$

и умножимъ постоянные члены на 10000. Отъ этихъ преобразованій начальныя уравненія примутъ такой видъ:

$$\begin{aligned} &+1.24444\Delta \Omega - 0.29672\Delta \eta - 0.215400\Delta n - 0.072114\Delta m + 0.215195\Delta p + 0.74578\Delta \theta - 0.00097 = 0 \\ &+1.20920\Delta \Omega - 0.79730\Delta \eta - 0.361600\Delta n - 0.158704\Delta m + 0.361350\Delta p + 1.06770\Delta \theta + 0.91872 = 0 \\ &+0.83064\Delta \Omega - 1.21362\Delta \eta - 0.339108\Delta n - 0.166550\Delta m + 0.338930\Delta p + 1.05102\Delta \theta + 0.95110 = 0 \\ &+0.19790\Delta \Omega - 1.61606\Delta \eta + 0.025271\Delta n + 0.013117\Delta m - 0.024808\Delta p + 0.89356\Delta \theta + 1.33289 = 0 \\ &-0.92534\Delta \Omega - 2.63000\Delta \eta + 1.164400\Delta n + 0.622508\Delta m - 1.16430\Delta \theta + 1.03950\Delta \theta + 3.01357 = 0 \\ &-2.24390\Delta \Omega - 1.58310\Delta \eta + 2.817143\Delta n + 1.557250\Delta m - 2.816687\Delta p + 0.22425\Delta \theta + 2.32794 = 0 \\ &-3.40574\Delta \Omega - 1.90056\Delta \eta + 4.448300\Delta n + 2.475336\Delta m - 4.447600\Delta p - 0.00174\Delta \theta + 2.49189 = 0 \\ &-0.74817\Delta \Omega - 0.05227\Delta \eta + 2.392555\Delta n + 1.384410\Delta m - 2.392390\Delta p - 1.86613\Delta \theta + 0.93710 = 0 \\ &-0.63775\Delta \Omega - 0.19614\Delta \eta + 0.147130\Delta n + 0.049258\Delta m - 0.146785\Delta p - 1.09570\Delta \theta + 0.00039 = 0 \\ &-0.63251\Delta \Omega - 0.50470\Delta \eta + 0.284656\Delta n + 0.124931\Delta m - 0.284329\Delta p - 1.41873\Delta \theta - 0.32292 = 0 \\ &-0.59156\Delta \Omega - 0.67558\Delta \eta + 0.394530\Delta n + 0.193604\Delta m - 0.394320\Delta p - 1.51007\Delta \theta + 0.21666 = 0 \\ &-0.57179\Delta \Omega - 0.72656\Delta \eta + 0.426266\Delta n + 0.221355\Delta m - 0.426100\Delta p - 1.69523\Delta \theta + 0.72402 = 0 \\ &-0.60804\Delta \Omega - 0.88884\Delta \eta + 0.350840\Delta n + 0.187568\Delta m - 0.350720\Delta p - 2.83980\Delta \theta - 0.76988 = 0 \\ &+0.55956\Delta \Omega - 0.25752\Delta \eta - 1.041430\Delta n - 0.575675\Delta m + 1.041143\Delta p - 2.99706\Delta \theta - 0.60060 = 0 \\ &+1.33058\Delta \Omega - 0.27448\Delta \eta - 2.214300\Delta n - 1.232176\Delta m + 2.213700\Delta p - 4.63466\Delta \theta - 0.85521 = 0 \\ &+1.98900\Delta \Omega - 0.12376\Delta \eta - 3.654916\Delta n - 2.1149\Delta m + 3.653835\Delta p - 4.26300\Delta \theta - 0.66422 = 0 \end{aligned}$$

§ 59.

При составленіи коэффициентовъ окончательныхъ уравненій или суммъ квадратовъ и произведеній коэффициентовъ начальныхъ уравненій можно найти средство повторить эти многосложныя вычисленія: для этого въ каждомъ уравненіи опредѣлить алгебраическую сумму коэффициентовъ $S_i = A_i + B_i + \dots + F_i$ и потомъ выскѣть съ произведеніями $\Sigma A_i^2, \Sigma A_i B_i, \Sigma A_i C_i,$

и пр. вычислим также $\Sigma A_i S_i$ и подобными же образом $\Sigma B_i S_i, \Sigma C_i S_i \dots$ и $\Sigma \omega_i S_i$, означая через ω_i постоянные члены начальныхъ уравнений, тогда получимъ повѣрку всѣхъ коэффициентовъ изъ равенствъ

$$\begin{aligned} \Sigma A_i S_i &= \Sigma A_i^2 + \Sigma A_i B_i + \dots + \Sigma A_i F_i \\ \Sigma B_i S_i &= \Sigma A_i B_i + \Sigma B_i^2 + \dots + \Sigma B_i F_i \\ &\dots \\ \Sigma F_i S_i &= \Sigma A_i F_i + \Sigma B_i F_i + \dots + \Sigma F_i^2 \\ \Sigma \omega_i S_i &= \Sigma A_i \omega_i + \Sigma B_i \omega_i + \dots + \Sigma F_i \omega_i \end{aligned} \tag{S}$$

Эти повѣрки должны удовлетворяться на столько, сколько можно требовать отъ сложныхъ вычислений съ пятизначными логорифмами; въ моихъ вычисленияхъ наиримѣръ получились при непосредственномъ опредѣленіи изъ уравненій (S) слѣдующія величины.

$\Sigma A_i S_i$	$\Sigma B_i S_i$	$\Sigma C_i S_i$	$\Sigma D_i S_i$	$\Sigma E_i S_i$	$\Sigma F_i S_i$	$\Sigma \omega_i$
+ 12.0437;	+ 24.1187;	+ 1.2846;	+ 1.4994;	1.2842;	+ 79 9007;	— 13.6234
+ 12.0414	+ 24.1229	+ 1.2854	+ 1.5010	— 1.2867	+ 79.9011	— 13 6210

Согласіе между этими числами удовлетворительно, потому что равенство почти вездѣ заключается въ пятомъ знакѣ. Въ большей части случаевъ для вычисленія коэффициентовъ окончательныхъ уравненій достаточно бываетъ даже четырехзначныхъ логорифмовъ и еще удобнее тогда употребляетъ таблицы квадратовъ чиселъ. Подобныя таблицы составлены Б. Я. Швейцеромъ для квадратовъ всѣхъ чиселъ отъ 0 до 1000; я пользовался ими для повѣрки первыхъ четырехъ цифръ (*). Эти же таблицы служатъ весьма удобно для вычисленія произведеній по формулѣ:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$$

въ которой величины $(a+b)^2, a^2$ и b^2 получаются прямо изъ таблицъ по аргументамъ $a + b, a$ и b .

Для нашего примѣра окончательныя уравненія таковы

$$\begin{aligned} &+ 29\ 6828\Delta\ \Omega + 10\ 8809\Delta\ \gamma - 37\ 0835\Delta\ \mu - 20\ 5876\Delta\ \mu + 37\ 0737\Delta\ \rho - 7\ 9249\Delta\ \theta - 18\ 6377 = 0 \\ &+ 10\ 8809\Delta\ \Omega + 20\ 0768\Delta\ \gamma - 15\ 1109\Delta\ \mu - 8\ 3336\Delta\ \mu + 15\ 1068\Delta\ \rho + 1\ 5029\Delta\ \theta - 21\ 1584 = 0 \\ &- 37\ 0835\Delta\ \Omega - 15\ 1109\Delta\ \gamma + 55\ 0054\Delta\ \mu + 30\ 9020\Delta\ \mu - 54\ 9924\Delta\ \rho + 22\ 5648\Delta\ \theta + 28\ 2922 = 0 \\ &- 20\ 5876\Delta\ \Omega - 8\ 3336\Delta\ \gamma + 30\ 9020\Delta\ \mu + 17\ 3771\Delta\ \mu - 30\ 8949\Delta\ \rho + 13\ 0380\Delta\ \theta + 15\ 7909 = 0 \\ &- 37\ 0737\Delta\ \Omega + 15\ 1068\Delta\ \gamma - 54\ 9924\Delta\ \mu - 30\ 8949\Delta\ \mu + 54\ 9796\Delta\ \rho - 22\ 5595\Delta\ \theta - 28\ 2855 = 0 \\ &- 7\ 9249\Delta\ \Omega + 1\ 5029\Delta\ \gamma + 22\ 5648\Delta\ \mu + 13\ 0380\Delta\ \mu - 22\ 5595\Delta\ \rho + 73\ 2798\Delta\ \theta + 10\ 3776 = 0 \end{aligned}$$

§ 60.

Исключеніе неизвѣстныхъ изъ этихъ уравненій чрезвычайно трудно произвести посредствомъ простыхъ умноженій; при вычисленіи помощи логорифмовъ нужно употреблять

* Эти таблицы будутъ помѣщены при иѣнешкомъ переводѣ сочиненія Савича «Приложеніи Теоріи Вар. къ числ. табл. и мод. изм.» издаваемою Лансомъ (Lais).

семизначныя таблицы, потому что при шести последовательных исключениях входит очень большое число сочетаний между коэффициентами и они осложняются по мѣрѣ приближения къ концу. Чтобы вѣстѣ съ величинами неизвѣстных получить вѣсы ихъ, а также имѣть возможность поверить результаты, Энке совѣтуетъ сдѣлать всегда два раза полное исключение въ противоположномъ порядкѣ неизвѣстныхъ; послѣ этого всѣ результаты будутъ поверены и легко можно будетъ вычислить вѣсы всѣхъ 6 неизвѣстныхъ. Самое вычисление всего удобнѣе расположить въ такомъ порядкѣ (*): называя вообще черезъ ΣA_i^2 коэффициентъ перваго исключаемого неизвѣстнаго въ первомъ уравненіи, черезъ ΣB_i^2 коэффициентъ слѣдующаго за нимъ во второмъ уравненіи и т. д.; уравненія всегда можно представить въ видѣ

$$\begin{aligned} x \Sigma A_i^2 + y \Sigma A_i B_i + z \Sigma A_i C_i + u \Sigma A_i D_i + w \Sigma A_i E_i + t \Sigma A_i F_i + \Sigma A_i \omega_i &= 0 \\ x \Sigma A_i B_i + y \Sigma B_i^2 + z \Sigma B_i C_i + u \Sigma B_i D_i + w \Sigma B_i E_i + t \Sigma B_i F_i + \Sigma B_i \omega_i &= 0 \\ \dots \\ x \Sigma A_i F_i + y \Sigma B_i F_i + z \Sigma C_i F_i + u \Sigma D_i F_i + w \Sigma E_i F_i + t \Sigma F_i^2 + \Sigma F_i \omega_i &= 0 \end{aligned}$$

тогда, написавъ рядъ коэффициентовъ

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Sigma A_i^2 \quad \Sigma A_i B_i \quad \Sigma A_i C_i \quad \Sigma A_i D_i \quad \Sigma A_i E_i \quad \Sigma A_i F_i \quad \Sigma A_i S_i \quad \Sigma A_i \omega_i \\ \text{и} & \\ 2) \quad & \lg \Sigma A_i^2 \quad \lg \Sigma A_i B_i \quad \lg \Sigma A_i C_i \quad \lg \Sigma A_i D_i \quad \lg \Sigma A_i E_i \quad \lg \Sigma A_i F_i \quad \lg \Sigma A_i S_i \quad \lg \Sigma A_i \omega_i \end{aligned}$$

вычислимъ $\lg \frac{\Sigma A_i B_i}{\Sigma A_i^2}$; прикладывая это число ко всѣмъ членамъ ряда (2) начиная со втораго

и прискладывая соответствующія числа, подпишемъ ихъ почленно подъ рядомъ

$$\begin{aligned} 3) \quad & \Sigma B_i^2 \quad \Sigma B_i C_i \quad \Sigma B_i D_i \quad \Sigma B_i E_i \quad \Sigma B_i F_i \quad \Sigma B_i S_i \quad \Sigma B_i \omega_i \\ \text{г. е. 4} \quad & \frac{(\Sigma A_i B_i)^2}{\Sigma A_i^2} \quad \frac{\Sigma A_i B_i \Sigma A_i C_i}{\Sigma A_i^2} \quad \frac{\Sigma A_i B_i \Sigma A_i D_i}{\Sigma A_i^2} \quad \frac{\Sigma A_i B_i \Sigma A_i E_i}{\Sigma A_i^2} \quad \frac{\Sigma A_i B_i \Sigma A_i F_i}{\Sigma A_i^2} \quad \frac{\Sigma A_i B_i \Sigma A_i S_i}{\Sigma A_i^2} \quad \frac{\Sigma A_i B_i \Sigma A_i \omega_i}{\Sigma A_i^2} \end{aligned}$$

и вычтемъ (4) изъ (3), тогда получатся коэффициенты, которые мы назовемъ черезъ

$$\begin{aligned} 5) \quad & \Sigma B_{i,i}^2 \quad \Sigma B_{i,i} C_{i,i} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 6) \quad & \lg \Sigma B_{i,i}^2 \quad \lg \Sigma B_{i,i} C_{i,i} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

значеніе этихъ коэффициентовъ и пр. легко видѣть изъ § 28.

Далѣе пишемъ

$$7) \quad \Sigma C_i^2 \quad \Sigma C_i D_i \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

и подъ нимъ

$$8) \quad \frac{(\Sigma A_i C_i)^2}{\Sigma A_i^2} \quad \frac{\Sigma A_i C_i \Sigma A_i D_i}{\Sigma A_i^2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

разность которыхъ даетъ

$$9) \quad \Sigma C_{i,i}^2 \quad \Sigma C_{i,i} D_{i,i} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

подъ этимъ рядомъ

* Больше подробное изложеніе всѣхъ практическихъ приемовъ читателя найдутъ въ послѣдней статьѣ Энке: *Berl. Astronomisch. Jahrbuch 1836b.*

$$10) \quad \frac{(\sum B_{i,1} C_{i,1})^2}{\sum B_{i,1}^2} \frac{\sum B_{i,1} C_{i,1} \sum B_{i,1} D_{i,1}}{\sum B_{i,1}^2} \dots$$

изъ разности которыхъ получимъ

$$\begin{aligned} 11) & \quad \sum C_{i,2}^2 & \quad \sum C_{i,2} D_{i,2} & \dots \\ 12) & \quad \lg \sum C_{i,2} & \quad \lg \sum C_{i,2} D_{i,2} & \dots \\ 13) & & \quad \sum D_{i,2}^2 & \dots \\ 14) & & \quad \frac{(\sum A_i D_i)^2}{\sum A_i^2} & \dots \end{aligned}$$

подвигаясь такимъ образомъ далѣе и далѣе вправо, дойдемъ наконецъ до

$$\sum F_{i,5}^2 \quad \sum F_{i,5} S_{i,5}, \quad \sum F_{i,5} \omega_i^{(5)}$$

и отсюда найдемъ $t = \frac{\sum F_{i,5} \omega_i^{(5)}}{\sum F_{i,5}^2}$ съ вѣсомъ $\sum F_{i,5}^2$

Вертикальный рядъ содержащій S служить для постепенной проверки вычисленій на основаніи равенствъ:

$$\sum B_{i,1} S_{i,1} = \sum B_{i,1}^2 + \sum B_{i,1} C_{i,1} + \sum B_{i,1} D_{i,1} + \sum B_{i,1} E_{i,1} + \sum B_{i,1} F_{i,1}$$

и точно тоже для C, D, E, F .

$$\sum C_{i,2} S_{i,2} = \sum C_{i,2}^2 + \sum C_{i,2} D_{i,2} + \sum C_{i,2} E_{i,2} + \sum C_{i,2} F_{i,2}$$

и также для D, E и F .

$$\sum D_{i,3} S_{i,3} = \sum D_{i,3}^2 + \sum D_{i,3} E_{i,3} + \sum D_{i,3} F_{i,3}$$

и т. д. Наконецъ

$$\sum F_{i,5} S_{i,5} \text{ должна быть равна } \sum F_{i,5}^2.$$

Если продолжимъ порядокъ вычисленій, то получимъ при помощи множителей $\frac{\sum A_i \omega_i}{\sum A_i^2}, \frac{\sum B_{i,1} \omega_i^{(1)}}{\sum B_{i,1}^2}$ и пр. количества

$$\begin{aligned} & \sum S_i \omega_i & \quad \sum \omega_i^2 \\ & \sum S_{i,1} \omega_{i,1} & \quad \sum \omega_{i,1}^2 \\ & \sum S_{i,2} \omega_{i,2} & \quad \sum \omega_{i,2}^2 \\ & \dots & \dots \\ & 0 & \quad \sum \omega_i^{(5)2} \end{aligned}$$

Первый изъ этихъ вертикальных рядовъ служитъ для проверки суммъ содержащихъ ω включительно до $\sum F_{i,5} \omega_i^{(5)}$, на основаніи равенствъ: $\sum S_{i,1} \omega_i^{(1)} = \sum A_{i,1} \omega_i^{(1)} + \sum B_{i,1} \omega_i^{(1)} + \dots + \sum F_{i,1} \omega_i^{(1)}$ и пр. сумма $\sum \omega_{i,5}^2$ должна быть равна суммѣ квадратовъ погрѣшностей начальныхъ уравненій, когда въ нихъ вставимъ полученные изъ окончательныхъ уравненій величины неизвестныхъ, какъ это было объяснено въ концѣ § 29.

§ 61.

Если при исключении (§ 28) остановимся на двух уравнениях съ двумя неизвестными, которые будутъ вида

$$\begin{aligned} \xi_{n-1} \Sigma p_{i,n-1}^2 + \xi_n \Sigma p_{i,n-2} p_{i,n} - \Sigma p_{i,n-1} \omega_i^{(n-1)} &= 0 \\ \xi_{n-1} \Sigma p_{i,n-1} p_{i,n} + \xi_n \Sigma p_{i,n}^2 - \Sigma p_{i,n} \omega_i^{(n-1)} &= 0 \end{aligned}$$

исключимъ изъ нихъ вмѣсто ξ_{n-1} неизвестную ξ_n , определяя ее изъ послѣдняго уравненія. то выдеть

$$\left[\Sigma p_{i,n-1}^2 - \frac{(\Sigma p_{i,n} p_{i,n-1})^2}{\Sigma p_{i,n}^2} \right] \xi_{n-1} - \left[\Sigma p_{i,n-1} \omega_i^{(n-1)} - \frac{\Sigma p_{i,n} p_{i,n-1} \Sigma p_{i,n} \omega_i^{(n-1)}}{\Sigma p_{i,n}^2} \right] = 0$$

и коэффициентъ при ξ_{n-1} будетъ вѣсь величини ξ_{n-1} . Означимъ вѣсь вообще ξ_k черезъ $P(\xi_k)$, тогда

$$\begin{aligned} P(\xi_{n-1}) &= \Sigma p_{i,n-1}^2 - \frac{(\Sigma p_{i,n-1} p_{i,n})^2}{\Sigma p_{i,n}^2} \\ \text{и } P(\xi_n) &= \Sigma q_{i,n}^2 = \Sigma p_{i,n}^2 - \frac{(\Sigma p_{i,n-1} p_{i,n})^2}{\Sigma p_{i,n-1}^2} \end{aligned}$$

отсюда легко замѣтимъ, что

$$P(\xi_{n-1}) = P(\xi_n) \cdot \frac{(\Sigma p_{i,n-1})^2}{\Sigma p_{i,n}^2}$$

или въ нашемъ случаѣ

$$P(w) = P(t) \cdot \frac{\Sigma E_{i,4}^2}{\Sigma F_{i,4}^2}$$

Такимъ образомъ извѣстель будетъ вѣсь величини w , которая, также какъ и вѣсь другія получится помощью простой подстановки: именно изъ уравненій

$$\begin{aligned} w + \frac{t \Sigma E_{i,4} F_{i,4} + \Sigma E_{i,4} \omega_i^{(4)}}{\Sigma E_{i,4}^2} &= 0 \\ u + \frac{w \Sigma D_{i,2} E_{i,2} + t \Sigma D_{i,2} F_{i,2} + \Sigma D_{i,2} \omega_i^{(2)}}{\Sigma D_{i,2}^2} &= 0 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Возвращаясь въ исключеніи § 28 къ тремъ уравненіямъ съ тремя неизвестными и помѣная порядокъ исключаемыхъ неизвестныхъ найдемъ, что вѣсь величини u будетъ

$$P(u) = \Sigma D_{i,3}^2 \cdot \frac{\Sigma E_{i,4}^2 \cdot \Sigma F_{i,2}^2}{K \cdot \Sigma E_{i,3}^2}$$

$$\text{гдѣ } K = \Sigma F_{i,3}^2 - \frac{(\Sigma E_{i,2} F_{i,2})^2}{\Sigma E_{i,2}^2}$$

такой способ определять вѣсы можно бы обобщить и применить ко всѣмъ неизвѣстнымъ, но выраженія вѣсовъ получаются болѣе и болѣе сложными; для 6 неизвѣстныхъ достаточно определять вѣсы трехъ послѣднихъ неизвѣстныхъ изъ выражений $P(t)$, $P(u)$ и $P(n)$; потомъ произведе исключеніе снова въ обратномъ порядкѣ неизвѣстныхъ, подобнымъ же образомъ найдемъ вѣсы $P(x)$, $P(y)$ и $P(z)$ и сверхъ того получимъ по два раза величины всѣхъ неизвѣстныхъ; согласіе ихъ служить повѣркомъ исчисленій.

§ 62.

Обращаясь къ нашимъ окончательнымъ уравненіямъ, сдѣлаемъ одно важное въ практическомъ отношеніи замѣчаніе. По смыслу задачи неизвѣстныя величины независимы между собою, следовательно въ рѣшеніи уравненій не можетъ быть, говоря строго, никакой неопредѣленности. Исключеніе неизвѣстныхъ изъ линейныхъ уравненій будетъ очевидно возможно въ томъ случаѣ, когда коэффициенты при двухъ неизвѣстныхъ во всѣхъ уравненіяхъ равны или пропорціональны, потому что тогда можно соединить эти двѣ неизвѣстныя подъ одну вида $x + y$ или $x + ny$ и отдѣленіе x и y совершенно невозможно. Чтобы подобная неопредѣленность обнаружилась при вычисленіяхъ приблизительныхъ достаточно, если коэффициенты только приближаются къ равенству, или пропорціональности. Мы имѣемъ подобныя случаи въ нашемъ примѣрѣ; именно коэффициенты при $\Delta\lambda$ и $\Delta\rho$, т. е. при ΔN и $\Delta\Pi$ очень мало различаются между собою; вслѣдствіе этого два изъ окончательныхъ уравненій почти тождественны. Легко найти причину этого обстоятельства: коэффициенты при $\Delta\Pi$ и ΔN въ теоріи эллиптическаго движенія вычисляются по формуламъ

$$\left[1 - \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{r^2} \right] \left(\frac{d\lambda}{du} \right) - a \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{sn} \varphi \left(\frac{d\lambda}{dr} \right) \\ a \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{sn} \varphi \left(\frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{r^2} \left(\frac{d\lambda}{du} \right)$$

и подобнымъ же относительно широты β . Въ этихъ формулахъ a означаетъ большую полуось кометной орбиты, которая значительно больше единицы и радиусовъ векторовъ r вблизи перигелия, следовательно выраженія коэффициентовъ должны быть почти равны и съ обратными знаками; понятно что такое обстоятельство встрѣтится при всякой значительно удлиненной орбитѣ. Неудобство близкихъ къ равенству коэффициентовъ состоитъ въ томъ, что величины $\Delta\rho$ и $\Delta\lambda$ полученные изъ различныхъ исключеній могутъ выходить совершенно несходными; впрочемъ мы можемъ получить довольно благонадежныя величины этихъ неизвѣстныхъ, исключивъ ихъ прежде другихъ неизвѣстныхъ; потому что при этомъ коэффициенты ихъ сочетаются еще съ точными величинами прочихъ коэффициентовъ

§ 63.

Чтобы дать понятіе о степени согласія результатовъ при различныхъ исключеніяхъ я помѣщу здѣсь результаты, сдѣланныхъ мною 4-хъ исключеній, въ которыхъ всѣ повѣрки удовлетворялись почти вполне:

Поряд. исключ. неизв.	$lg \Delta \Omega$	$lg \Delta \gamma$	$lg \Delta m$	$lg \Delta \theta$	$lg \Delta p$	$lg \Delta n$
$\Delta \Omega, \Delta \gamma, \Delta n, \Delta m, \Delta p, \Delta \theta$	9.7432792n(*)	9.9103501	0.9211999	8.7971472n	0.29456	0.52560n
$\Delta \gamma, \Delta m, \Delta \Omega, \Delta \theta, \Delta p, \Delta n$	9.7455133n	9.9102405	0.92671	8.8048183n	0.81051	0.03227
$\Delta \theta, \Delta p, \Delta m, \Delta n, \Delta \gamma, \Delta \Omega$	9.7490775n	9.9098387	0.9299113	8.7969087n	0.90143	0.40535
$\Delta n, \Delta p, \Delta \theta, \Delta \Omega, \Delta m, \Delta \gamma$	9.7501637n	9.9096238	0.9312869	8.7966778n	0.91249	0.43655

Для вѣсовъ получились слѣдующія величины:

$P(\Delta \Omega) = 0.681$	$P(\Delta \theta) = 47.84$
$P(\Delta \gamma) = 10.566$	$P(\Delta p) = 0.0001524$
$P(\Delta m) = 0.0017778$	$P(\Delta n) = 0.0001963$

Два послѣднія системы неизвѣстныхъ болѣе надежны для опредѣленія Δn и Δp ; принимая среднія выводы изъ нихъ за величины неизвѣстныхъ, получимъ

$lg \Delta \Omega = 9.74962 n$
$lg \Delta \gamma = 9.90968$
$lg \Delta n = 0.42095$
$lg \Delta m = 0.93060$
$lg \Delta p = 0.90696$
$lg \Delta \theta = 8.79679 n$

Отсюда, пользуясь замѣчаніемъ слѣдующимъ въ § 58, найдемъ:

$\Delta \Omega = -11''.59;$	$P(\Delta \Omega) = 0.681$
$\Delta \gamma = +33''.51;$	$P(\Delta \gamma) = 2.6415$
$\Delta N = +0''.03;$	$P(\Delta N) = 785.24$
$\Delta \mu = +0.0001758;$	$P(\Delta \mu) = 1777800000$
$\Delta \Pi = +0''.08;$	$P(\Delta \Pi) = 609.72$
$\Delta \rho = -0''.13;$	$P(\Delta \rho) = 4784$

§ 64.

Найденные вѣсы результатовъ достаточны для того, чтобы судить объ относительной благонадежности поправокъ; но для того, чтобы видѣть ясно, какъ велики могутъ быть погрѣшности исправленныхъ элементовъ, мы должны еще опредѣлить ихъ вѣроятныя погрѣшности. Для этой цѣли необходимо знать степень точности самыхъ наблюдений, т. е. среднюю ихъ ошибку. На основаніи сказаннаго въ § 35 мы можемъ весьма точно опредѣлить среднюю ошибку наблюдений а posteriori по формулѣ

$$m = \sqrt{\frac{\sum E_i^2}{\sum p_i - n}}$$

(*) Значекъ γ при логарифмѣ означаетъ, что логарифмъ принадлежитъ отрицательному числу. Мы пишемъ здѣсь характеристикъ 8 и 9, подразумевая, что изъ нихъ должно вычитать 10.

которая въ нашемъ случаѣ дастъ

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma E_i^2}{34}}$$

Погрѣшности E_i суть тѣ величины, въ которыя обращаются начальныя уравненія отъ подстановки найденныхъ величинъ поправокъ. Сумма ΣE_i^2 можетъ быть вычислена чрезъ непосредственную подстановку и еще въ видѣ $\Sigma \omega_i^{(6)2}$, какъ показано въ § 60. Въ этомъ послѣднемъ видѣ получается ΣE_i^2 , когда мы въ $\Sigma \varepsilon_i^2$ подставимъ на мѣсто погрѣшностей ε_i линейныя выраженія ихъ и приведемъ эту сумму къ виду § 29. Произведя на самомъ дѣлѣ эту подстановку, мы безъ труда найдемъ равенство

$$\Sigma E_i^2 = \Sigma \omega_i^2 - \frac{(\Sigma a_{i,1} \omega_i^{(1)})^2}{\Sigma a_{i,1}^2} - \frac{(\Sigma b_{i,2} \omega_i^{(2)})^2}{\Sigma b_{i,2}^2} - \frac{(\Sigma c_{i,3} \omega_i^{(3)})^2}{\Sigma c_{i,3}^2} - \dots - \frac{(\Sigma q_{i,n} \omega_i^{(n)})^2}{\Sigma q_{i,n}^2}$$

и если, согласно съ принятымъ обозначеніемъ, положимъ сперва

$$\Sigma \omega_i^2 - \frac{(\Sigma a_{i,1} \omega_i^{(1)})^2}{\Sigma a_{i,1}^2} = \Sigma \omega_i^{(2)2}$$

потомъ

$$\Sigma \omega_i^{(2)2} - \frac{(\Sigma b_{i,2} \omega_i^{(2)})^2}{\Sigma b_{i,2}^2} = \Sigma \omega_i^{(3)2}$$

и т. д.

то получимъ наконецъ (§ 29)

$$\Sigma E_i^2 = \Sigma \omega_i^{(6)2}$$

что обращается для шести неизвѣстныхъ въ

$$\Sigma E_i^2 = \Sigma \omega_i^{(6)2}$$

При четырехъ исключеніяхъ получились для $\Sigma \omega_i^{(6)2}$ слѣдующія величины: 1,44078; 1,42925; 1,42337 и 1,42868. При подстановкѣ поправокъ въ начальныя уравненія получилось восемь положительныхъ величинъ для E и восемь же отрицательныхъ; по величинѣ отрицательныя имѣли незначительный перевѣсъ; сумма квадратовъ вышла равна 1,44380, что довольно согласно съ найденными величинами $\Sigma \omega_i^{(6)2}$. Принявъ $\Sigma E_i^2 = 1,44380$ и уничтоживъ постояннаго множителя введеннаго при составленіи уравненій, получимъ по обращеніи линейныхъ мѣръ въ секунды

$$m = 4''.2501$$

Вѣроятная погрѣшность наблюденій найдется изъ равенства

$$r = 0,67443 m$$

$$r = 2''.8667. (*)$$

и будетъ

(*) Если среднюю ошибку вычислять по формулѣ

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma E_i^2}{\Sigma p_i^2}}$$

то для вѣроятной погрѣшности выйдетъ величина 2''.64; при вычисленіи же помощію первыхъ степеней погрѣшностей получается 2''.03.

Наконец по формулѣ (§ 51)

$$r_k = \gamma' \sqrt{2} \frac{m}{\sqrt{P_k}}$$

подставляя въ ней $\gamma' = 1.63525$, найдемъ по даннымъ величинамъ m и P_k вѣроятныя погрѣшности результатовъ; множитель $\gamma' m \sqrt{2}$ равенъ 9.8287; слѣд.

$$r_k = \frac{9.8287}{\sqrt{P_k}}$$

Введемъ теперь поправки $\Delta \Omega$, Δi и пр. въ приближенные элементы Ω_0 , i_0 , ...; исправленные элементы съ ихъ вѣроятными погрѣшностями будутъ:

Элементы δ	Вѣроятн. погр.	Вѣроятн. погр. по прежн. способу
$\Omega = 165^\circ 18' 48'' . 40$	11'' . 913	3'' . 474
$i = 116 \ 58 \ 3 . 89$	6 . 047	1 . 764
$N = 294 \ 16 \ 46 . 33$	0 . 347	0 . 102
$H = 204 \ 25 \ 39 . 95$	0 . 398	0 . 116
$\varphi = 84 \ 56 \ 47 . 14$	0 . 142	0 . 041
$\mu = 1'' . 9548408$	0.''0002331	0.''00006799

Въ послѣдней графѣ помѣщены здѣсь для сравненія величины, которыя принимались за вѣроятныя погрѣшности по прежнему способу ихъ опредѣленія.

Изъ этихъ элементовъ выводить:

		Разность отъ прибл. вел.
Эксцентриситетъ	0.9961427	0.0000000
Большая полуось	148 79789	— 0.00886 ср. разст. δ отъ \odot
Малая полуось	13.107181	— 0.000694 — —
Время полнаго обращ.	1815.08	— 0.16 зв. года.
Время прох. чрезъ перих.	29 Сент. 23 ^h 22 ^m 3 ^s .36Ср Гр вр.	+ 0.01054 ср. сут.

ПОЛОЖЕНІЯ.

1.

Средніе выводы заслуживаютъ доверія только при значительномъ числѣ наблюдений.

2.

Гауссовы теоріи способа наименьшихъ квадратовъ основаны на положеніяхъ недоказанныхъ и не достаточно убѣдительныхъ.

3.

Случайная погрѣшность наблюдений не зависитъ отъ величины измѣряемаго количества.

4.

Переходъ отъ правила арифметической среды къ способу наименьшихъ квадратовъ не требуетъ высшихъ исчислений.

5.

Обыкновенный способъ опредѣленія вѣроятныхъ погрѣшностей результатовъ безопытныхъ только въ случаѣ одной неизвѣстной величины

6.

Въ теоретическомъ отношеніи способъ наименьшихъ квадратовъ не есть безусловно самый выгодный.
